٥-٤ مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية
Derivatives of natural logarithmic functions

نتيجة ٥

$\frac{د}{د س}(\text{لط } س) = \frac{١}{س}$، حيث $س > ٠$

نتيجة ٦

$\frac{د}{د س}(\text{لط } د(س)) = \frac{د'(س)}{د(س)}$

وبصورة خاصة:

$\frac{د}{د س}(\text{لط } (أس + ب)) = \frac{أ}{أس + ب}$

تمارين ٥-٤

١) أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $ص = \text{لط } ٣س$

ب) $ص = \text{لط } ٧س^{١}$

ج) $ص = \text{لط } (٢س + ١)$

د) $ص = ٥ + \text{لط } (س^{٢} + ١)$

هـ) $ص = (\text{لط } (٢س - ١))^{٢}$

و) $ص = \text{لط } \sqrt{٣ - س}$

ل ص = لط(٥س + لط س)

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{٥س + لط س} \times (\frac{٥}{س} + \frac{1}{س})$

$= \frac{1}{(٥س + لط س)} \times \frac{٥س + 1}{س} = \frac{٥س + 1}{س(٥س + لط س)}$

★ ٢) في التمرين ١ إجابة الجزئية (أ) هي إجابة الجزئية (ب) نفسها. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تبرر ذلك؟

$\frac{د}{د س}(لط ٩س) = \frac{د}{د س}(لط ٩ + لط س)$

$= 0 + \frac{1}{س}$

$= \frac{1}{س}$

لأي عدد ثابت ①

٣) أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = س لط س

ب ص = ٢س^{٢} لط س

$\frac{د ص}{د س} = س \times \frac{1}{س} + لط س \times 1$

$= 1 + لط س$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س^{٢} \times \frac{1}{س} + لط س \times ٦س^{٢}$

$= ٢س + ٦س^{٢} لط س$

$= ٢س(1 + ٣ لط س)$

٥) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = هـ^{٢س} − ٥ لط (٢س + ١) عند س = ٠

$\frac{د ص}{د س} = ٢ هـ^{٢س} - ٥ \times \frac{٢}{٢س+١}$

$= ٢ هـ^{٠} - \frac{١٠}{١+٠}$

عند س = ٠

الميل = $٢ \times هـ^{٠} - \frac{١٠}{١+٠}$

$= ٢ - ١٠$

$= -٨$

٦) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = س^{٢} لط ٥ س، فأوجد قيمة كل من $\frac{د ص}{د س}$، $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند س = ٢

$\frac{د ص}{د س} = س^{٢} \times \frac{٥}{٥س} + لط(٥س) \times ٢س$

$= س + ٢س لط ٥س$

عند س = ٢

$\frac{د ص}{د س} = ٢ + ٢ \times ٢ لط(٥ \times ٢)$

$= ٢ + ٤ لط ١٠$

$= ١١,٢$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ١ + ٢س \times \frac{١}{س} + لط(٥س) \times ٢$

$= ٣ + ٢ لط ٥س$

عندما س = ٢ :

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٣ + ٢ \times لط ١٠ = ٧,٦$

٧) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = س^{٢} لط س فأوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى، وحدد ما إذا كانت نقطة عظمى أو صغرى.

$\frac{د ص}{د س} = س^{٢} \times \frac{١}{س} + لط س \times ٢س$

$= س + ٢س لط س$

$= س(١ + ٢ لط س) = ٠$

$١ + ٢ لط س = ٠$

$٢ لط س = -١$

$لط س = -\frac{١}{٢}$

$س = هـ^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{هـ}}$

$ص = (\frac{١}{\sqrt{هـ}})^{٢} \times لط \frac{١}{\sqrt{هـ}}$

$ص = \frac{١}{هـ} \times -\frac{١}{٢}$

$ص = -\frac{١}{٢هـ}$

$\frac{د ص}{د س} = صفر$ ← س = ؟ ← نفوض (ص)

س = ٠ مرفوضة

النقطة الحرجة $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ ← $(س، ص)$

$\frac{ص}{س} = س + 2س$ لط س

$\frac{ص^2}{س^2} = 1 + 2س \times \frac{1}{س} + لط س \times 2$

$= 1 + 2 + 2$ لط س

$= 3 + 2$ لط س

$3 + 2$ لط $س = 3 + 2 \times -\frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$

عندما $س = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ نقطة حرجة صغرى

٨) إذا كانت معادلة منحنى الدالة $ص = \frac{لط س}{س}$، فأوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى، وحدد ما إذا كانت نقطة عظمى أو صغرى.

٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = لط (٥س − ٤) عند س = ١

$\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٥س - ٤}$ ← عند س = ١

ميل المماس = $\frac{٥}{٥ - ٤} = ٥$ ، (١ ، ٠)

ص = لط (٥ × ١ − ٤) = لط ١ = صفر

معادلة المماس:

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٠ = ٥ (س − ١)

ص = ٥س − ٥

١٠) استخدم قوانين اللوغاريتمات لتساعدك على إيجاد مشتقة كل ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = لطـ $\sqrt{٥س - ١}$

ب) ص = لطـ $\left(\frac{١}{٣س + ٢}\right)$

ج) ص = لطـ $(س(س + ١)^{٥})$

د) ص = لطـ $\left(\frac{٢س + ٣}{س - ١}\right)$

هـ) ص = لطـ $\left(\frac{١ - ٣س}{س^{٢}}\right)$

و) ص = لطـ $\left(\frac{س(س - ٢)}{س + ٤}\right)$

مُساعَدة

خذ اللوغاريتم الطبيعي (لط) لطرفَي المعادلة قبل أن تجري الاشتقاق.

١١) أوجد $\frac{د ص}{د س}$ لكلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $هـ^{ص} = ٢س^{٢} - ١$

$لـ هـ^{ص} = لط (٢س^{٢} - ١)$

$ص = لط (٢س^{٢} - ١)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ع س}{٢س^{٢} - ١}$

ب) $هـ^{ص} = ٣س^{٣} + ٢س$

$ص = لط (٣س^{٣} + ٢س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٩س^{٢} + ٢}{٣س^{٣} + ٢س}$

ج) $هـ^{ص} = (س + ١)(س - ٥)$

$ص = لط (س + ١) + لط (س - ٥)$

١٢) إذا كانت معادلة منحنى الدالة س = $\frac{1}{5}$ (هـ ص (٢س − ٣) + ٤)، فأوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ١

ص = ٥ س

ص = هـ (٢س − ٣) + ٤

ص = ٥ س − ٤

بأخذ لـ ط للطرفين

ط ص = ط (٥ س − ٤)

ص = (٢س − ٣) ط (٥ س − ٤)

$\frac{ص}{(٢س-٣)}$ = $\frac{ط(٥س-٤)}{٢س-٣}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ \times ٣ - ٢س^{-١}}{(٢س-٣)^{٢}}$ − $\frac{٥}{٥س-٤}$ × ط (٥ س − ٤) × ٢

عندما س = ١ :

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٦ - ٢ \times ١ - ٥}{(-١)^{٢}}$ = $\frac{-٥}{١}$ = − ٥