٥-٥ مشتقات الدوال المثلثية
Derivatives of trigonometric functions

قواعد اشتقاق الدوال المثلثية

$$\frac{د}{د س}(\text{جا } س) = \text{جتا } س$$

$$\frac{د}{د س}(\text{جتا } س) = -\text{جا } س$$

$$\frac{د}{د س}(\text{ظا } س) = \frac{١}{\text{جتا}^{٢} س} = \text{قا}^{٢} س$$

$$\frac{د}{د س}\left(\text{جا }(أس + ب)\right) = أ \text{ جتا }(أس + ب)$$

وبالمثل، يمكن تبيان أن:

$$\frac{د}{د س}\left(\text{جتا }(أس + ب)\right) = -أ \text{ جا }(أس + ب)$$

$$\frac{د}{د س}\left(\text{ظا }(أس + ب)\right) = \frac{أ}{\text{جتا}^{٢}(أ س + ب)} = أ \text{ قا}^{٢}(أس + ب)$$

مقلوبات كل من جا س، جتا س، ظا س

- $\frac{١}{\text{جا } س} = \text{قتا } س$
- $\frac{١}{\text{جتا } س} = \text{قا } س$
- $\frac{١}{\text{ظا } س} = \text{ظتا } س$

تمارين ٥-٥

١) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = ٢ + جا س

$\frac{دص}{دس}$ = ٠ + جتا س

ب ص = ٢جا س + ٣جتا س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ × جتا س + ٣ × − جا س

= ٢جتا س − ٣ جا س

ج ص = ٢جتا س − ظا س

$\frac{دص}{دس}$ = −٢ جا س − قا^{2}س

د ص = ٣جا ٢س

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ × ٢ جتا ٢س

= ٦ جتا ٢س

هـ ص = ٤ظا ٥س

$\frac{دص}{دس}$ = ٤ × ٥ قا^2 ٥س

و ص = ٢جتا ٣س − جا ٢س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ × ٣ × − جا ٣س − ٢ جتا ٢س

= −٦جا ٣س − ٢ جتا ٢س

= −٢(٣ جا ٣س + جتا ٢س)

ز ص = ظا (٣س + ٢)

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ قا^2(٣س + ٢)

ح ص = جا (٢س + $\frac{\pi}{٣}$)

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا(٢س + $\frac{\pi}{٣}$)

ط ص = ٢جتا (٣س − $\frac{\pi}{٦}$)

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ × ٣ × − جا(٣س − $\frac{\pi}{٦}$)

= − ٦ جا (٣س − $\frac{\pi}{٦}$)

٢) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = جا^{3}س = (جا س)^3

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ (جا^{2}س) × جتا س

ب ص = ٥جتا^{2}٣س = ٥ (جتا ٣س)^2

$\frac{دص}{دس}$ = ٥ × ٢(جتا ٣س) × (−٣ جا ٣س)

= −٣٠ جتا ٣س جا ٣س

$هـ^{ص} \Leftarrow هـ^{ص}$

٤) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = $هـ^{جاس}$

$\frac{د ص}{د س} = جتاس \times هـ^{جاس}$

ب) ص = $هـ^{جتا٢س}$

$\frac{د ص}{د س} = -٢ جا٢س \; هـ^{جتا٢س}$

ج) ص = $هـ^{ظا٣س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ قا^{٢}٣س \; هـ^{ظا٣س}$

د) ص = $هـ^{(جاس - جتاس)}$

$\frac{د ص}{د س} = (جتاس + جاس) \; هـ^{(جاس - جتاس)}$

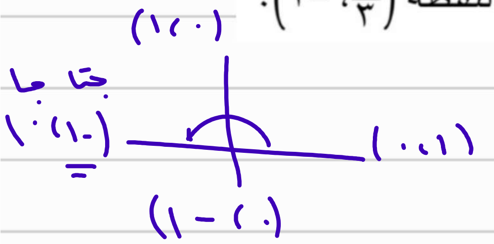
هـ) ص = $هـ^{س}$جتا س

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س} \times -جاس + جتاس \times هـ^{س}$

$= هـ^{س} (-جاس + جتاس)$

و) ص = $هـ^{س}$جا ٢س

٦) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٢جا ٣س − ٤جتا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٣}، -٢\right)$.



$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times ٣ \text{ جتا } ٣\text{س} - ٤ \times - \text{جا س}$$

$$= ٦ \text{ جتا } ٣\text{س} + ٤ \text{ جا س}$$

عند س = $\frac{\pi}{٣}$:

$$\text{ميل المماس} = ٦ \times \text{جتا} \left(٣ \times \frac{\pi}{٣}\right) + ٤ \times \text{جا } \frac{\pi}{٣}$$

$$= ٦ \times -١ + ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$= -٦ + ٢\sqrt{٣}$$

٧) بيّن أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٥}{٢ - \text{ظا س}}$ موجب دائمًا.

$$\text{ص} = ٥ \left(٢ - \text{ظا س}\right)^{-١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥ \times -١ \left(٢ - \text{ظا س}\right)^{-٢} \times - \text{قا}^٢ \text{س}$$

$$= ٥ \times \frac{١}{\left(٢ - \text{ظا س}\right)^٢} \times \frac{١}{\text{جتا}^٢ \text{س}}$$

$$= \frac{٥}{\text{جتا}^٢ \text{س} \left(٢ - \text{ظا س}\right)^٢} = \frac{\text{موجب}}{\text{موجب}} = \text{موجب}$$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} > ٠$ ← الميل دائمًا موجب

٨) أوجد كلًا من: $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$(قا س)، $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$(ظتا س)

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{قا س}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{١}{\text{جتا س}}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\left(\text{جتا س}\right)^{-١}\right)$$

$$= -١ \left(\text{جتا س}\right)^{-٢} \times - \text{جا س}$$

$$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^٢ \text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$$

$$= \text{ظا س قا س}$$

$$\frac{د}{دس}\left(ظتا س\right) = \frac{د}{دس}\left(\frac{جتا س}{جا س}\right) = \frac{جا س \times -جا س - جتا س \times جتا س}{جا^2 س}$$

$$= \frac{-\left(جا^2 س + جتا^2 س\right)}{جا^2 س} = \frac{-1}{جا^2 س} = -قتا^2 س$$

٩) بيّن أن العمودي على مماس منحنى الدالة ص = س جا س عند النقطة ل$\left(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right)$ يقطع محور السينات في النقطة $(\pi، ٠)$.

$\boxed{ص = ٠}$

$(١،٠)$

$$\frac{دص}{دس} = س \times جتا س + جا س \times ١ = س جتا س + جا س$$

عند س $= \frac{\pi}{٢}$ ← ميل المماس $= \frac{\pi}{٢} جتا \frac{\pi}{٢} + جا \frac{\pi}{٢}$

$$= \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١$$

$$= ١$$

∴ ميل العمودي $= -١$ ، $\left(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right)$

معادلة العمودي: $ص - ص_1 = م\left(س - س_1\right)$

$$ص - \frac{\pi}{٢} = -١\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$ص = -س + \frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢}$$

$$\boxed{ص = \pi - س}$$

يقطع المحور (س) ⇐ ص = ٠

$$\pi - س = ٠$$

$$\boxed{س = \pi} \rightarrow (\pi، ٠)$$

١٠) إذا كانت معادلة منحنى الدالة $\boxed{ص = ٥جا ٣س - ٢جتا س}$، فأوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $\boxed{\left(\frac{\pi}{٣}، -١\right)}$، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ، مقربًا م، جـ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الميل + نقطة

س ص

$\frac{دص}{دس} = ٥ \times ٣ جتا٣س - ٢ \times -جاس$

$= ١٥ جتا٣س + ٢ جاس$

عند $س = \frac{\pi}{٣}$ ← الميل $= ١٥ جتا\left(٣ \times \frac{\pi}{٣}\right) + ٢ \times جا\frac{\pi}{٣}$

$= ١٥ \times -١ + \cancel{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{\cancel{٢}} = -١٥ + \sqrt{٣}$

معادلة المماس هي:

$ص - (-١) = (-١٥ + \sqrt{٣})\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

$ص = -١٣,٣ س + ١٣,٩ - ١$

$ص = -١٣,٣ س + ١٢,٩$

١١) إذا كانت معادلة منحنى الدالة $\boxed{ص = ٣جتا ٢س + ٤جا ٢س + ١}$ حيث $\boxed{٠ \leqslant س \leqslant \pi}$، فأوجد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة على المنحنى، مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

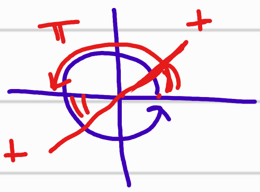
ك $\frac{دص}{دس} = صفر$

$\frac{دص}{دس} = ٣ \times ٢ \times -جا٢س + ٤ \times ٢ جتا٢س + ٠$

$= -٦ جا٢س + ٨ جتا٢س = صفر$

$\times ٢ \quad (٠ \leqslant س \leqslant \pi)$

$٠ \leqslant ٢س \leqslant ٢\pi$



$\frac{٨ \cancel{جتا٢س}}{\cancel{جتا٢س}} = \frac{٦ جا٢س}{جتا٢س}$

$٨ = ٦ ظا٢س$

$ظا٢س = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ →

$٢س = ظا^{-١}\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٠,٩٢٧$

الربع الأول ⇐ $\frac{٢س}{٢} = \frac{٠,٩٢٧}{٢}$

$\boxed{س = ٠,٤٦٤}$

الربع الثالث: $٢س = \pi + ٠,٩٢٧$

$س = \frac{٤,٠٧}{٢} = \boxed{٢,٠٣}$

١٢) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = $هـ^{س}$ جتا س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{٢}$، فأوجد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة على المنحنى، وحدد نوعها.

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س} \times -جاس + جتاس \times هـ^{س}$

$= \boxed{هـ^{س} (جتاس - جاس)}$

نقطة حرجة $\frac{دص}{دس} = ٠$

$هـ^{س} (جتاس - جاس) = ٠$

جتاس − جاس = ٠

$\frac{جتاس}{جتاس} = \frac{جاس}{جتاس}$

ظاس = ١ ⇐ س = $ظا^{-١}(١)$

$\boxed{س = \frac{\pi}{٤}}$ ←

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = هـ^{س} \times (-جاس - جتاس) + (جتاس - جاس) \times هـ^{س}$

$= هـ^{س} (-جاس - \cancel{جتاس} + \cancel{جتاس} - جاس)$

$= هـ^{س} (-٢جاس)$

$= -٢ هـ^{س} جاس$

= سالب × موجب × موجب ⇐ سالب < صفر

∴ النقطة الحرجة عظمى.