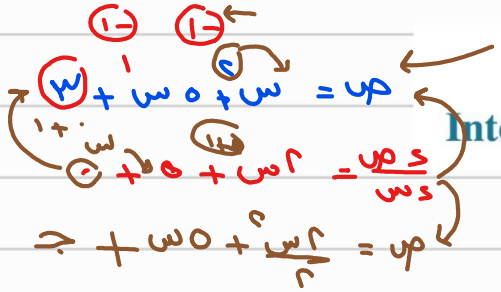
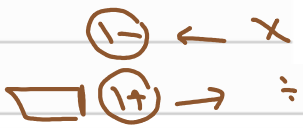


٦-١ التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل
Integration as the reverse of differentiation

التكامل غير المحدود



نتيجة ١

إذا كانت $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{س}^{\text{ن}}$، فإن ص $= \frac{١}{\text{ن} + ١}\,\text{س}^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$، حيث جـ عدد ثابت، ن $\neq -١$

قد تجد من الأسهل تذكر هذه النتيجة عند وصفها بالكلمات الآتية:

"أضِف ١ إلى القوة ن، ثم اقسم على القوة الجديدة، وأضف الثابت جـ".

يستخدم الرمز $\int$ ليدلّ على التكامل.

على سبيل المثال، لنجد تكامل $\text{س}^{٣}$، نكتب:

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{د س} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{جـ}$$

نسمي $\int \text{س}^{٣}\,\text{د س}$ **بالتكامل غير المحدود** indefinite integral لـ $\text{س}^{٣}$ بالنسبة إلى س.

وسُمي بالتكامل غير المحدود لأن له عددًا لانهائيًا من الحلول.

باستخدام رمز التكامل، نكتب قاعدة تكامل القوة على النحو الآتي:

نتيجة ٢

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{د س} = \frac{١}{\text{ن} + ١}\,\text{س}^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$$ حيث جـ ثابت، ن $\neq -١$

نكتب قاعدة تكامل ضرب الدالة في عدد ثابت على النحو الآتي:

نتيجة ٣

$$\int \text{ك د}(\text{س})\,\text{د س} = \text{ك} \int \text{د}(\text{س})\,\text{د س}$$، حيث ك عدد ثابت.

نكتب قاعدة تكامل جمع دالتَين أو الفرق بينهما على النحو الآتي:

نتيجة ٤

$$\int (\text{د}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س}))\,\text{د س} = \int \text{د}(\text{س})\,\text{د س} \pm \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س}$$

تمارين ٦-١

١) أوجد ص بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{ك ص}{ك س} = ١٥س^{٢}$

ب $\frac{ك ص}{ك س} = ١٤س^{٦}$

ج $\frac{ك ص}{ك س} = ١٢س^{٣}$

د $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{٣}{س^{٢}}$

هـ $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{١}{٢س^{٣}}$

و $\frac{ك ص}{ك س} = \frac{٤}{\sqrt{س}}$

٢) أوجد د (س) بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $د'(س) = ٥س^{٤} - ٢س^{٣} + ٣$

ب $د'(س) = ٣س^{٥} + س^{٢} - ٢س$

ج $د'(س) = \frac{٢}{س^{٣}} + \frac{٨}{س^{٢}} + ٦س$

د $د'(س) = \frac{٩}{س^{٧}} - \frac{٣}{س^{٢}} - ٤$

٣) أوجد ص بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ) $\frac{د ص}{د س} = س(س + ٥)$

ب) $\frac{د ص}{د س} = ٢س^{٢}(٣س + ١)$

ج) $\frac{د ص}{د س} = س(س + ٢)(س - ٨)$

د) $\frac{د ص}{د س} = \frac{س^{٤} - ٢س + ٥}{٢س^{٣}}$

هـ) $\frac{د ص}{د س} = \sqrt{س}(س - ٣)^{٢}$

و $\frac{ص}{س} = \frac{٥س^{٢} + ٣س + ١}{\sqrt{س}}$

٤) أوجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\int ١٢س^{٥} ص س$

ب $\int ٢٠س^{٣} ص س$

ج $\int ٣س^{-٢} ص س$

د $\int \frac{٤}{س^{٣}} ص س$

هـ $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}} ص س$

و $\int \frac{٥}{س\sqrt{س}} ص س$

٥) أوجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\int (س + ١)(س + ٤) ص س$

ب $\int (س - ٣)^{٢} ص س$

ج $\int (2\sqrt{س} - 1)^2 \, د س$

د $\int \sqrt[3]{س} (س^2 + 1) \, د س$

$= \int (س^{\frac{7}{3}} + 2 س^{\frac{1}{3}} + س^{-\frac{1}{3}}) \, د س$

$= \frac{3}{10} س^{\frac{10}{3}} + \frac{2 \times 3}{4} س^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2} س^{\frac{2}{3}} + ث$

هـ $\int \frac{س^2 - 1}{2 س^2} \, د س$

و $\int \frac{س^3 + 6}{2 س^3} \, د س$

ز $\int \frac{س^2 + 2\sqrt{س}}{3 س} \, د س$

ح $\int \frac{س^4 - 10}{س \sqrt{س}} \, د س$

ط $\int \left(2\sqrt{س} - \frac{3}{س^2 \sqrt{س}}\right)^2 \, د س$

$= \int \left(2\sqrt{س}\right)^2 + (2 \times 2\sqrt{س} \times \frac{-3}{س^2 \sqrt{س}}) + \left(\frac{-3}{س^2 \sqrt{س}}\right)^2 \, د س$

$= \int (4 س - 12 س^{-\frac{3}{2}} + 9 س^{-5}) \, د س$

$= 2 س^2 + 24 س^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4} س^{-4} + ث$

$= 2 س^2 - \frac{24}{\sqrt{س}} - \frac{9}{4 س^4} + ث$