

# ١-٦ التكامل كعملية عكسية للتفاضل

Integration as the reverse of differentiation

## التكامل غير المحدود

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2) &= 2x \\ \frac{d}{dx} (x^3) &= 3x^2 \\ \frac{d}{dx} (x^4) &= 4x^3 \\ \frac{d}{dx} (x^5) &= 5x^4 \\ \frac{d}{dx} (x^6) &= 6x^5 \\ \frac{d}{dx} (x^7) &= 7x^6 \\ \frac{d}{dx} (x^8) &= 8x^7 \\ \frac{d}{dx} (x^9) &= 9x^8 \\ \frac{d}{dx} (x^{10}) &= 10x^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2) &= 2x \\ \frac{d}{dx} (x^3) &= 3x^2 \\ \frac{d}{dx} (x^4) &= 4x^3 \\ \frac{d}{dx} (x^5) &= 5x^4 \\ \frac{d}{dx} (x^6) &= 6x^5 \\ \frac{d}{dx} (x^7) &= 7x^6 \\ \frac{d}{dx} (x^8) &= 8x^7 \\ \frac{d}{dx} (x^9) &= 9x^8 \\ \frac{d}{dx} (x^{10}) &= 10x^9 \end{aligned}$$

### نتيجة ١

إذا كانت  $\frac{d}{dx} (x^n) = n x^{n-1}$  فإن  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ، حيث  $C$  عدد ثابت،  $n \neq -1$

قد تجد من الأسهل تذكر هذه النتيجة عند وصفها بالكلمات الآتية:

”أضف ١ إلى القوة  $n$ ، ثم اقسم على القوة الجديدة، وأضف الثابت  $C$ “.

?

يستخدم الرمز  $\int$  ليبدل على التكامل.

على سبيل المثال، لنجد تكامل  $x^2$ ، نكتب:

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

نسمي  $\int x^n dx$  بالتكامل غير المحدود **indefinite integral** لـ  $x^n$  بالنسبة إلى  $x$ .

وسُمي بالتكامل غير المحدود لأن له عددًا لانهائيًا من الحلول.

باستخدام رمز التكامل، نكتب قاعدة تكامل القوة على النحو الآتي:

### نتيجة ٢

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
، حيث  $C$  ثابت،  $n \neq -1$

نكتب قاعدة تكامل ضرب الدالة في عدد ثابت على النحو الآتي:

### نتيجة ٣

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$
، حيث  $k$  عدد ثابت.

نكتب قاعدة تكامل جمع دالتين أو الفرق بينهما على النحو الآتي:

### نتيجة ٤

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

(١) أوجد ص بدلالة س لكل مما يأتي:

ج  $\frac{ك}{ص} = \frac{١٢}{٢س}$   
 $ص = \frac{١٢}{٤} + ج$   
 $ص = ٣س + ج$

ب  $\frac{ك}{ص} = \frac{١٤}{٦س}$   
 $ص = \frac{١٤}{٧} + ج$   
 $ص = ٢س + ج$

ا  $\frac{ك}{ص} = \frac{١٥}{٢س}$   
 $ص = \frac{١٥}{١٠} + ج$   
 $ص = ٥س + ج$

و  $\frac{ك}{ص} = \frac{٤}{١٦س}$   
 $ص = ٤س + ج$

هـ  $\frac{ك}{ص} = \frac{١}{٢س}$   
 $ص = ٢س + ج$

د  $\frac{ك}{ص} = \frac{٣}{٢س}$   
 $ص = \frac{٣}{١} + ج$   
 $ص = ٣س + ج$

(٢) أوجد د (س) بدلالة س لكل مما يأتي:

ب  $د(س) = ٣س - ٢س + ٢س$   
 $د(س) = \frac{٣س}{١} - \frac{٢س}{٣} + \frac{٢س}{٢}$   
 $د(س) = ٣س - \frac{٢س}{٣} + ٢س$

ا  $د(س) = ٥س - ٢س + ٢س$   
 $د(س) = \frac{٥س}{٥} - \frac{٢س}{٤} + \frac{٢س}{٢}$   
 $د(س) = ٥س - \frac{٢س}{٤} + ٢س$

د  $د(س) = ٤ - \frac{٢}{٢س} - \frac{٩}{٧س}$

ج  $د(س) = ٦س + \frac{٨}{٢س} + \frac{٢}{٢س}$   
 $د(س) = ٦س + \frac{٨}{٢س} + \frac{٢}{٢س}$

د  $د(س) = \frac{٢س}{٩} + \frac{٨}{١س} + \frac{٦}{٢س}$   
 $د(س) = \frac{٢س}{٩} + \frac{٨}{١س} + \frac{٦}{٢س}$

(٣) أوجد ص بدلالة س لكل مما يأتي:

ب  $\frac{ص}{س} = \frac{ص^2}{ص^2(س+١)}$

ا  $\frac{ص}{س} = \frac{ص(س+٥)}{ص(س+٥)}$   
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص^٢ + ٥ص}{ص(س+٥)}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص^٢ + ٥ص}{ص(س+٥)}$   
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص^٢}{ص(س+٥)} + \frac{٥ص}{ص(س+٥)}$   
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص^٢}{ص(س+٥)} + \frac{٥}{س+٥}$

د  $\frac{ص}{س} = \frac{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}{ص(س^٢ - ٢س + ٥)}$

ج  $\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س+٢)(س-١))}{ص(س(س+٢)(س-١))}$

ه  $\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص(س(س-٣))}{ص(س(س-٣))}$

و  $\frac{5s^2 + 3s + 1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{3s}{s^4} + \frac{5s^2}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^3} + \frac{5}{s^2}$  (14)

$\Rightarrow \frac{5}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{1}{s} = \frac{5s}{s^3} + \frac{3}{s^3} + \frac{s^2}{s^3} = \frac{5s + 3 + s^2}{s^3}$

(4) أوجد كلاً ممّا يأتي:

ج  $\left[ \frac{3s^2 - 2}{s^3} \right]$

ب  $\left[ \frac{20s^2 - 2}{s^3} \right]$

أ  $\left[ \frac{12s^2 - 1}{s^3} \right]$

$\Rightarrow \frac{20s^2 - 2}{s^3} = \frac{20s^2}{s^3} - \frac{2}{s^3}$   
 $\Rightarrow \frac{20}{s} - \frac{2}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{12s^2 - 1}{s^3} = \frac{12s^2}{s^3} - \frac{1}{s^3}$   
 $\Rightarrow \frac{12}{s} - \frac{1}{s^3}$

و  $\left[ \frac{5}{s^3} \right]$

هـ  $\left[ \frac{2}{s^3} \right]$

د  $\left[ \frac{4}{s^3} \right]$

$\Rightarrow \frac{2}{s^3} = \frac{2s^2}{s^5} = \frac{2}{s^3}$   
 $\Rightarrow \frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{4}{s^3} = \frac{4s^2}{s^5} = \frac{4}{s^3}$   
 $\Rightarrow \frac{4}{s^3} = \frac{4}{s^3}$

(5) أوجد كلاً ممّا يأتي:

أ  $\left[ \frac{(s+1)(s+4)}{s^3} \right]$

ب  $\left[ \frac{(s-3)^2}{s^3} \right]$

$\Rightarrow \frac{(s+1)(s+4)}{s^3} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3} = \frac{s^2}{s^3} + \frac{5s}{s^3} + \frac{4}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{(s-3)^2}{s^3} = \frac{s^2 - 6s + 9}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{s^2 - 6s + 9}{s^3} = \frac{s^2}{s^3} - \frac{6s}{s^3} + \frac{9}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s^3}$

ج  $\left[ \frac{2(1 - \sqrt{s})}{s^2} \right]$

د  $\left[ \frac{2\sqrt{s}(s^2 + 1)}{s^5} \right]$

$= \left[ \frac{s^{\frac{1}{2}}(s^2 + 1)}{s^5} \right]$

$= \left[ \frac{s^{\frac{1}{2}}(s^{\frac{1}{2}} + s^{\frac{3}{2}})}{s^5} \right]$

$= \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s^5} + \frac{s^{\frac{3}{2}}}{s^5} = \frac{1}{s^{\frac{9}{2}}} + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s^2}$

$\left( \frac{1}{s^{\frac{9}{2}}} \right)$

$\left( \frac{1}{s^{\frac{9}{2}}} \right)$

$\frac{1}{s^{\frac{9}{2}}}$

$\left( \frac{1}{s^{\frac{9}{2}}} \right)$

و  $\left[ \frac{s^2 + 6}{s^2} \right]$

ه  $\left[ \frac{s^2 - 1}{s^2} \right]$

ح  $\left[ \frac{s^4 - 10}{s^5} \right]$

ز  $\left[ \frac{s^2 + 2\sqrt{s}}{s^3} \right]$

ط  $\left[ \frac{2\sqrt{s}}{s^3} - \frac{3}{s^2\sqrt{s}} \right] = \left[ \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{s^{\frac{5}{2}}} \right] = \left[ \frac{-1}{s^{\frac{5}{2}}} \right]$

$= \left[ \frac{-1}{s^{\frac{5}{2}}} \right] = \left[ \frac{-1}{s^2\sqrt{s}} \right]$

$= \frac{-1}{s^2\sqrt{s}} = \frac{-1}{s^{\frac{5}{2}}}$

$= \frac{-1}{s^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{9}{s^{\frac{9}{2}}} = \frac{9}{s^4\sqrt{s}}$

$\left( \frac{9}{s^4\sqrt{s}} \right)$