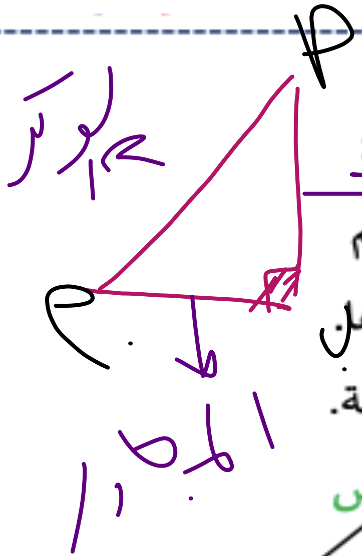
الصف العاشر

الوحدة الحادية عشرة:

المثلث القائم الزاوية

أ/مازن الشرقي		مادة الرياضيات		للتواصل: ٩٩٤١٠٠١٣

(١١ – ١) نظرية فيثاغورس

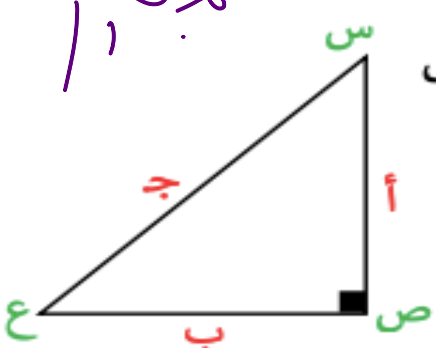


التعلم القبلي: تذكر أن فــي المثلــث القائــم الزاويــــة:

✓ الـــوتر هـــو أطـــول ضلـــع في المثلــث القائــــم وهو الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة ولا يجاورها.

✓ الضلعين الآخرين في المثلث القائم هما ضلعي الزاوية القائمة.

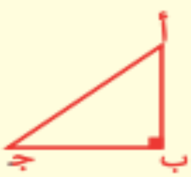
في الشكل المقابل المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص



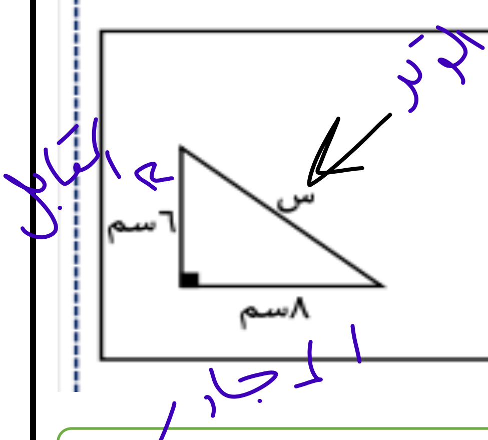
أ ، ب هما ضلعي الزاوية القائمة.

جـ يسمــــى الوتـــــــــــر.

التعبير الرمزي		التعبير اللفظي
$جـ^2 = أ^2 + ب^2$ ومنها: $أ^2 = جـ^2 - ب^2$ $ب^2 = جـ^2 - أ^2$	نظرية فيثاغورس	في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طول ضلعي الزاوية القائمة



مثال: أوجد طول الضلع المشار إليه بالحرف س



(الوتر)^2 = (المقابل)^2 + (المجاور)^2

الوتر = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$

= ١٠

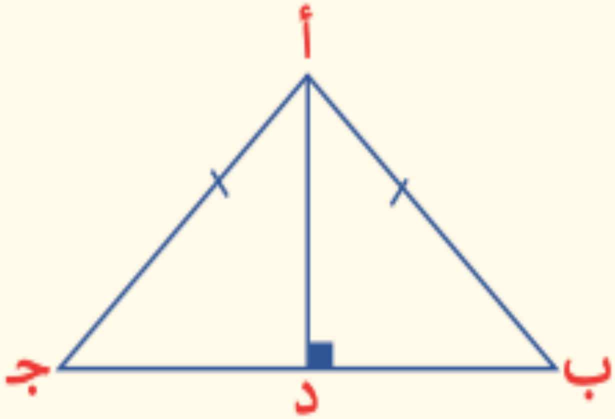
(الوتر)^2 = (الأول)^2 + (الثاني)^2

$(٨)^2 = (\cancel{س})^2 + (\cancel{٣})^2$

$س^2 = \sqrt{(٨)^2 - (٣)^2}$

$س = \sqrt{(٨)^2 - (٣)^2} = \sqrt{٥٥}$

لاحظ: المستقيم المرسوم من رأس المثلث أ ب ج المتطابق الضلعين عموديا على القاعدة ينصف القاعدة في د



$\overline{أب} = \overline{أج}$

$\overline{أد} \perp \overline{بج}$

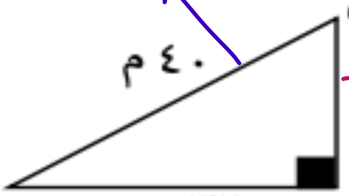
د منتصف $\overline{بج}$

$\overline{بد} = \overline{دج} = \frac{١}{٢}\,\overline{بج}$

نشاط فردي -١-:

(١) أ) ضـــع دائرة حـــول الإجـــابة الصحيحة:

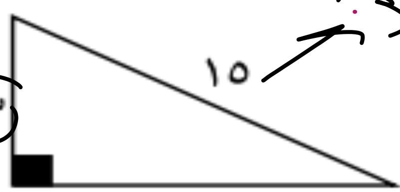
محيط المثلث القائم في الشكل المقابـــل:



○ ٥٦م ○ ٦٤

○ ٧٢ ○ ٩٦

ب) حوط العلاقة الرياضية الصحيحة:

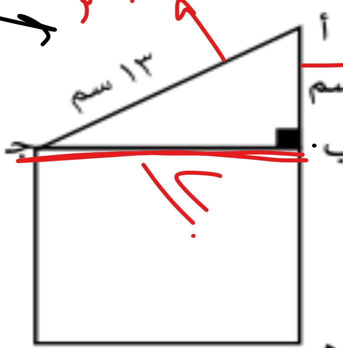


○ س+٣+٣ =١٥ ○ س^2 +٣س=١٠٨

○ (س+٣)^2 =١٥-س^2 ○ س^2+٦س+٩=٢٢٥

(٢) أكمل:

في الشكل المقابل مساحة المربع ب هـ د جـ = ــــــــــــ سم^2



مساحة المربع = ل٤ = ١٢×٤ = ٤٨

(الوتر)^2 = (المقابل)^2 + (المجاور)^2

(١٣)^2 = (٥)^2 + (المجاور)^2

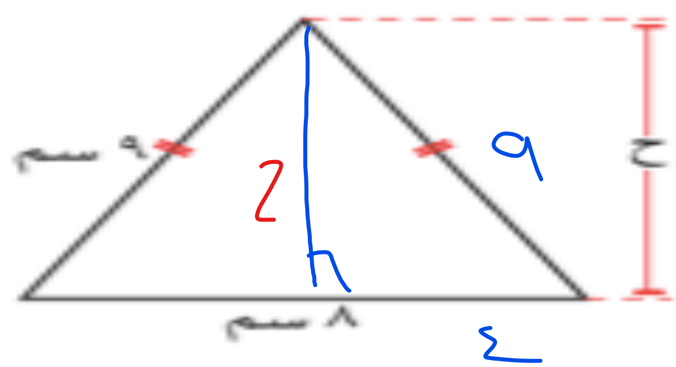
(المجاور)^2 = (١٢)^2 − (٥)^2

المجاور = ١٢

أنتبه:

- ✔ لا يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث إلا في المثلثات القائمـــــة
- ✔ يجب تربيع الأضلاع قبل الجمع عند تطبيق نظرية فيثاغورث

تدريب: أوجد طول الضلع المجهول في كلّ مثلّث من المثلّثات التالية:



$(\text{الوتر})^{٢} = (\text{المقابل})^{٢} + (\text{المجاور})^{٢}$

$(٩)^{٢} = (\text{المقابل})^{٢} + (٤)^{٢}$

$\sqrt{(\text{المقابل})^{٢}} = \sqrt{(٩)^{٢} - (٤)^{٢}}$

$\text{المقابل} = \sqrt{٦٥}$

اختبار المثلث القائم الزاوية

٢٥ = ٢٥　　　٢٥ ≠ ٢٤

إذا كانت أ ، ب ، جـ أطوال أضلاع مثلث (جـ أكبر الأضلاع طولا)

- **إذا كان : جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}** (الوتر)
  المثلث يكون **قائم** الزاوية
  - أذا كانت أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة فإنها تسمى ثلاثيـــات فيثاغـورث.
- **إذا كان : جـ^{٢} ≠ أ^{٢} + ب^{٢}**
  المثلث يكون **غير قائم** الزاوية

مثال : أكمل الجدول الآتي:

أطوال أضلاع المثلث	هل المثلث قائم الزاوية: نعم	هل المثلث قائم الزاوية: لا	السبب
٦سم ، ٨سم ، ١٠سم	✓		$(١٠)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢}$ ١٠٠ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ = ١٠٠
٦سم ، ١٢سم، ١٤سم		✓	$(١٤)^{٢} = (٦)^{٢} + (١٢)^{٢}$ ١٩٦ ≠ ١٨٠
٤,٨سم، ٦سم، ٣,٦سم	✓		$(٦)^{٢} = (٤,٨)^{٢} + (٣,٦)^{٢}$ ٣٦ = ٣٦

(١١ – ٢) تطبيقات على نظرية فيثاغورث:

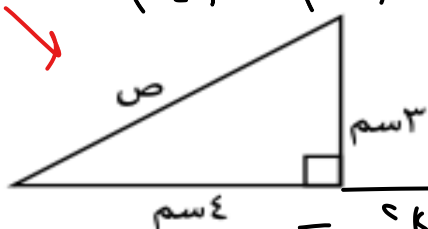
التعلم القبلي:

(المجاور)^٢ + (المقابل)^٢ = (الوتر)^٢

$(٤)^٢ + (٣)^٢ = $ (الوتر)^٢

١) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

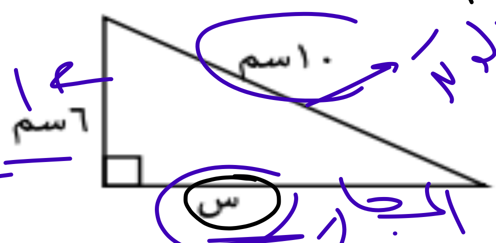
أ) قيمة ص في المثلث المرسوم هي:



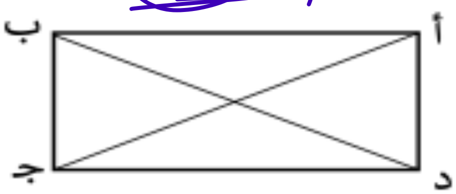
الوتر = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢} =$

٣ ٤ ٨ ٥

ب) قيمة س في المثلث المرسوم هي:



٦ ١٠ ٨ ٤



٢) تذكر أن قطري المستطيل متساويان في الطول

$\overline{\text{أجـ}} = \overline{\text{ب د}}$

- ✓ أن نظرية فيثاغورث من النظريات المهمة التي يمكن استخدامها في حل مسائل كثيرة من الحياة اليومية
- ✓ ملاحظات تساعدك على استخدام نظرية فيثاغورث في حل بعض المسائل الحياتية:

١) ابحث دائما عن مثلث قائم الزاوية في سياق المسألة لتتمكن من استخدام نظرية فيثاغورث.

٢) ارسم تمثيلا للموقف الموجود في المسائل اللفظية .

٣) ارسم المخططات عندما تعطي الاحداثيات.

مثال -١: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

طول قطر المستطيل الذي طوله ١٦ مم وعرضه ١٢ مم يساوي:

~~١٢ ١٦ ٢٠ ٢٨~~

سجل ملاحظاتك

(القطر)^2 = (الطول)^2 + (العرض)^2

$(١٦)^2 = (١٢)^2 + (س)^2$

$س = \sqrt{(١٦)^2 - (١٢)^2}$

$\boxed{١٠,٥٨٣}$

مثال-٢ : أوجــــد المسافــــة بــــين النقطتين (-٢ ، -٢) ، (-٧ ، ٦)

الحل

المسافة = $\sqrt{(ص_2 - ص_1)^2 + (س_2 - س_1)^2}$

$= \sqrt{(٦ - (-٢))^2 + (-٧ - (-٢))^2}$

=

نشاط فردي-٣ : المسافة بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (-١ ، ٢)

-٨ -٤ ٤ ٨

المسافة = $\sqrt{(ص_2 - ص_1)^2 + (س_2 - س_1)^2}$ = $\sqrt{(٢ - ٢)^2 + (-١ - ٣)^2}$

=

(١١ – ٣) النسب المثلثية

(١١-٣-أ) تسمية أضلاع المثلث القائم الزاوية

أي مثلث يحتوي على ثلاث أضلاع في المثلث القائم تنقسم الأضلاع فيه إلى

الـــوتـــر

هو الضلع الأطول في المثلث
في الشكل المقابل س ع هو الوتر

ضلعي الزاوية القائمة

الضلع **المجاور** للزاوية
هـــو أحد ضلعي الزاوية القائمة الملامس للزاوية الحادة

في الشكل المقابل ص ع
هو الضلع المجاور للزاوية (ع)

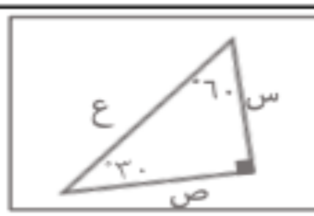
الضلع **المقابل** للزاوية
هو أحد ضلـــعي الزاويـــة القائمة الذي يقابل الزاوية الحادة ولا يتقاطـــع معها

في الشكل المقابل س ص
هو الضلع المقابل للزاوية (ع)

مثال(١): رقم (١) ص ٤٧ كتاب النشاط

نشاط فردي:

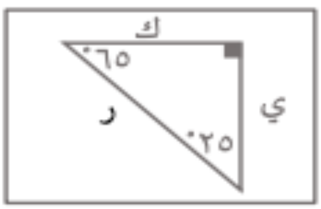
ظلل الإجابة الصحيحة:



	س	ص	ع
مقابل(٦٠°)	☐	☐	☐
مجاور(٣٠°)	☐	☐	☐
الوتر	☐	☐	☐
مقابل(٣٠°)	☐	☐	☐
مجاور(٦٠°)	☐	☐	☐

نشاط جماعي:

أكمل بوضع كلمة مجاور أو مقابل أو وتر



- ك = (٦٥°)............
- ي = (٢٥°)............
- ي = (٦٥°)............
- ك = (٢٥°)............
- ر = ...

(١١-٣ ب + ١١- ٣د) النسب المثلثية

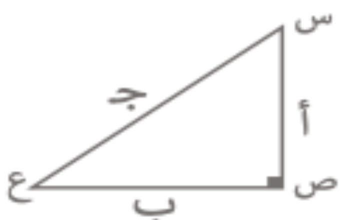
مفاهيم عامة

١) **حساب المثلثات:** هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه وهو أحد أهم فروع الرياضيات وأقدمها.

٢) **النسبة المثلثية:** هي النسبـــة التـــي تقارن بيـن طولي ضلعين مـــن أضلاع المثلـــث القائـــم .

سنقوم بدراسة ثلاثة نسب مثليــــة وهي:

ظل الزاوية – جيب تمام الزاوية – جيب تمام الزاوية

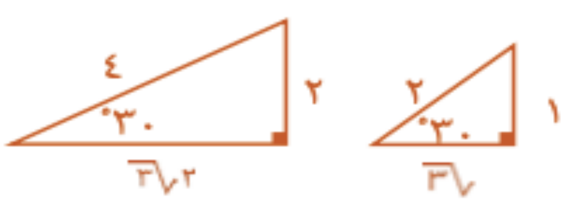


إذا كان المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص فـإن:

التعبير اللفظي	نسبة ظل الزاوية	نسبة جيب الزاوية	نسبة جيب تمام الزاوية
القاعدة	طول الضلع المقابل للزاوية / طول الضلع المجاور للزاوية	طول الضلع المقابل للزاوية / طول الوتر	طول الضلع المجاور للزاوية / طول الوتر
الـــرمـــز المستخدم للنسبـــة	ظل الزاوية س = ظا(س) ظا(س) = $\frac{ب}{أ}$	جيب الزاوية س = جا(س) جا (س) = $\frac{ب}{ج}$	جيب تمام الزاوية س = جتا(س) جتا(س) = $\frac{أ}{ج}$
المفـــتاح المستخدم للنســـبة	tan	sin	cos

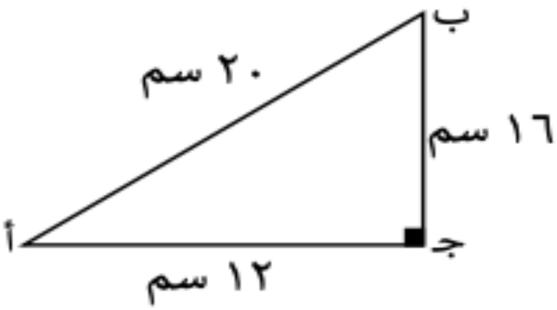
ملاحظة:

النسبة المثلثية تساوي مقدار ثابت لأي زاوية (س) أي تعتــمد على قيــاس الزاوية فقـــط وليــــس علـــى أطـــوال أضـــلاع المثلـــث.

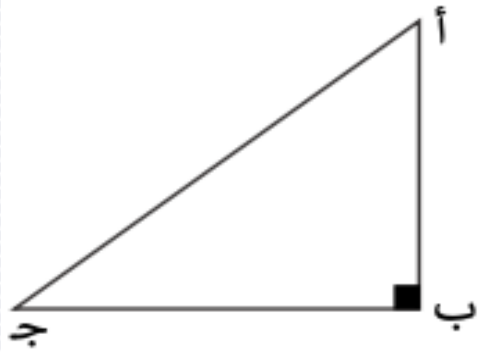


مثال(١):

أكمل الجدول التالي بما يناسبه من المثلث



جا(أ)	
جتا(أ)	
ظا(أ)	
جتا(ب)	
جا(ب)	
ظا(ب)	
جتا(أ) +جا(ب)	
(جتا(أ))^{٢} +(جا(أ))^{٢}	
ظا(أ)+ ظا(ب)	
جا(ب) – ظا(أ)	
جا(أ) -١	



تدريب: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة

في المثلث المرسوم أمامك ظا (أ) تساوي

$\frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}}$ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أ ب}}$

نشاط فردي(٢): ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

١) أكبر قيمة من القيم هي:

جا(٣٠°) جتا(٤٥°) ظا(٦٠°) جتا(٧٠°)

٢) قيمة ٢ ظا(٣٠°) × جتا(٦٠°) تساوي:

$\frac{١}{٢}$ ٠,٣ ١ ١,٥

(١١-٣-ج)حساب قياس الزوايا

إذا علم جيب الزاوية أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة فيمكن إيجادها باستخدام معكوس النسبة المثلثية (الدالة العكسية) كالتالي :

النسبة المعلومة	مفتاح الدالة العكسية	مثال لطريقة الإدخال على الألة الحاسبة
ظا(س)	Shift tan Tan^{-1}	ظا(س)= ٥ Shift tan ٥ = س≈٧٩°
جا(س)	Shift sin Sin^{-1}	جا(س)=٠,٥ Shift sin ٠,٥ = س=٣٠°
جتا(س)	Shift cos Cos^{-1}	جتا(س)=٠,٥٤٣٢ Shift cos ٠,٥٤٣٢ = س≈٥٧°

مثال (١): أستخدم الالة الحاسبة لتجد قيمة س إلى أقرب منزلة عشرية

جا(س)= ٠,٩٩

س=

جتا(س)= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س=

ظا(س)= $\frac{٢}{٥}$

س=

جتا(س)= ٠,٨٥

س=

نشاط فردي: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

١) قيمــة س لأقرب منزلة عشرية إذا كان ظا(س)= ٠,٥

٣٠°		٦٠°		٢٧°		٧٧°

٢) قيمة ظا(أ) إذا كانت جتا(أ)= ٠,٤

٢,٥		٠,٤٣٦		٢,٢٩١		٤,٥٨٣

٣) قياس الزاوية الحادة التي جيبها = $\frac{١}{٢}$

٣٠°		٤٥°		٦٠°		٩°

نشاط ثنائي: رقم (٣) كتاب النشاط صفحة ٥٢

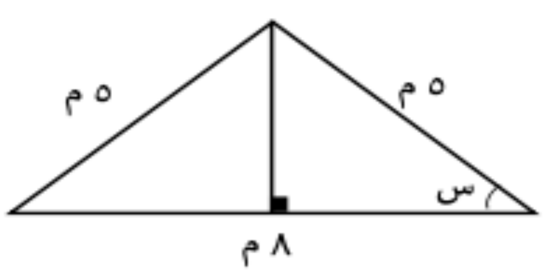
نشاط جماعي:

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحـة:

في الشكل المقابل : قيمة ظا(س)=

$\frac{٣}{٨}$		$\frac{٣}{٥}$

$\frac{٣}{٤}$		$\frac{٤}{٣}$



استخدام النسب المثلثية في مثلث قائم الزاوية

ايجاد الأضلاع المجهولة

- من المثلث المرسوم نحدد علاقة للزاوية المعطاة بالضلع المعطى والضلع المطلوب
- نستخدم النسبة المثلثية المناسبة ثم نعوض بالمعطيات
- نحل التناسب لإيجاد الضلع المطلوب

ايجاد الزوايا المجهولة

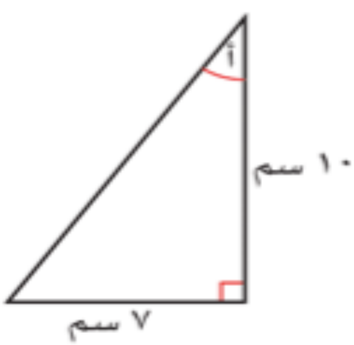
- من المثلث المرسوم نحدد علاقة الأضلاع المعطاة بالزاوية المطلوبة
- نستخدم النسبة المثلثية المناسبة ثم نعوض بالمعطيات
- نستخدم معكوس النسبة المثلثية لإيجاد الزاوية المطلوبة

مثال-١: أوجد طول الضلع المشار إلية بحرف في كل حالة من الحالات التالية أكتب إجابتك مقربا إلى أقرب عدد مكون من ثلاث أرقام معنوية

أ)

مثال-٢: أوجد قياس كل زاوية من الزوايا المشار إليها بحرف في كل حالة من الحالات التالية مقربا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة

أ)



نشاط فردي(١) :

لكلّ مثلّث من المثلّثات التالية أوجد طول الضلع المجهول المشار إليه بحرف (بعض التمارين يتطــلّب حلها استخــدام ظل الزاوية)

رقم (٤/ز) كتاب الطالب صفحة ٧٩

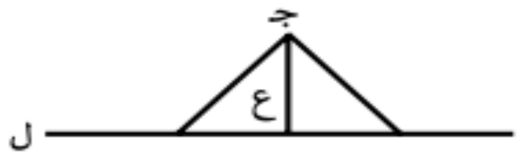
رقم (٤/ك) كتاب الطالب صفحة ٧٩

(١١-٤) حل مسائل باستخدام حساب المثلثات

التعلم القبلي:

تــذكـــر أن:

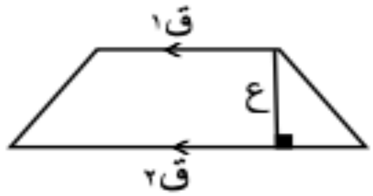
١) أقصر مسافة بين نقطة ومستقيـم هي



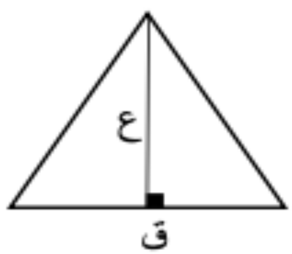
طول الخط العمودي من النقطة إلى المستقيم

ع هو أقصر مسافة بين النقطة جـ والمستقيم ل

٢) مساحة شبة المنحرف = $\frac{(ق_{١} + ق_{٢})}{٢} \times ع$



٣) مساحــة المثلـــث = $\frac{١}{٢}$ ق × ع



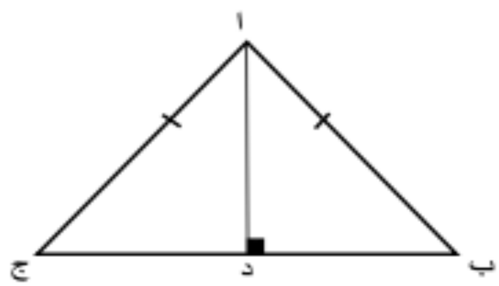
٤) في المثلـــث المتطابــق الضلعـــين العمــود المرسوم

من الرأس على القاعدة ينصف القاعدة وينصف الزاوية الرأس

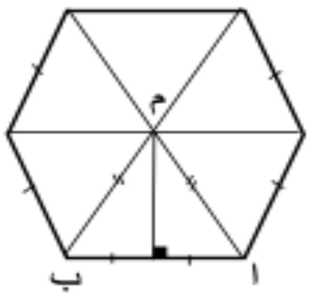
$\overline{أد} \perp \overline{بج}$

ب د = د ج = $\frac{١}{٢}$ ب ج

ق(ب $\hat{أ}$ د) = ق(د $\hat{أ}$ ج) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب $\hat{أ}$ ج)



٥) المضلع المنتظـــم هو مضلـــع زواياه متساوية في القيـــاس وجميع أضــــلاعه متطابقة في الطول.

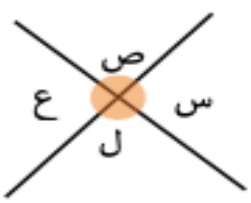


أ) يمكن حساب مساحة المضلع المنتظم عن طريق تقسيمة إلى مثلثات متطابقة.

مساحة المضلع المنتظم = مساحة ×عدد الأضلاع

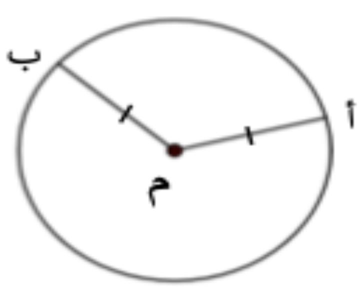
ب) قياس كل زاوية داخلية من زوايا المضلع المنتظم = $\frac{(ن-٢)\times ١٨٠^\circ}{ن}$

٦) مجموع قيـــاس الزوايا المتجمعة حـــول نقطة



س+ ص + ع + ل = ٣٦٠°

٧) أنصاف اقطار الدائرة الواحدة متساوية في الطول



م أ = م ب

لحل مسائل باستخدام حساب المثلثات يجب اتباع الإرشادات الاتية:

- إذا كان السؤال لا يتضمن مخططا فأرسم الشكل بدقة ووضوح
- أرســـم المثلثـات التي تستخدمها وســـم الزوايا والأضـــلاع
- حدد المثلثات قائمة الزاوية التي يمكن أن تفيدك في الحل
- حدد الأضلاع أو الزوايا التي تعرفها
- أكتب النسبة وأوجد طول الضلع أو قياس الزاوية المطلوبة

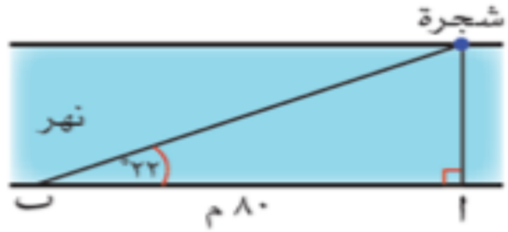
مثال (١) : رقم (٥) كتاب الطالب صفحة ٦٩

يوضـــح الشكل المجـــاور شجـــرة ارتفـــاعها ب د تبعد قاعدتها (ب) مقدار ٣٠ م أفقيًا عن النقطة (م) قياس الزاوية (ب م د) يساوي ٤٧°.

ضع علامة (√) في المكان المناسب مع التبرير

	صح	خطأ	التبرير
ظا(م) ≈ ١,٠٧			
$\overline{\text{د م}}$ = ٣٥ م			
ارتفاع الشجرة = ١٧,٣ م			

نشاط فردي : رقم (٦) كتاب الطالب صفحة ٦٩



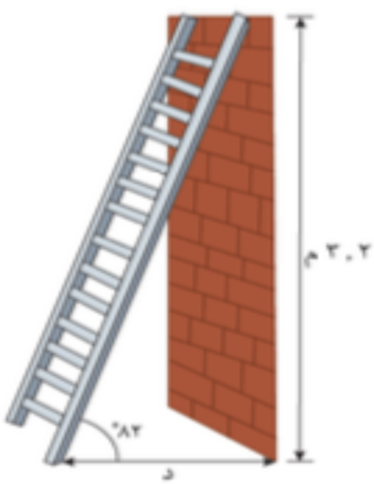
يريد مالك أن يقدّر عرض نهر ضفتيه متوازيتين. بدأ من النقطة (أ) المقابلة للشجرة مباشرة على الضفة الأخرى. مشى ٨٠ مترًا على الضفة فوصل إلى النقطة (ب) ثم نظر إلى الشجرة، فوجد أن المستقيم من النقطة (ب) إلى الشجرة يشكّل مع الضفة زاوية قياسها ٢٢°

ضع دائرة حول عرض النهر

١٩٨,١ م ٧٤,١٧ م ٨٦,٣ م ٢٩,٩٦

نشاط ثنائي : رقم (٨) كتاب الطالب صفحة ٧٠

يبيّن الشكل المجاور سلّمًا يرتكز على حائط. وجد كل من علي ومحمد على المسافة التي تصل بين قاعدة السلم وقاعدة الحائط بالأمتار مقربا الناتج إلى أقرب سم



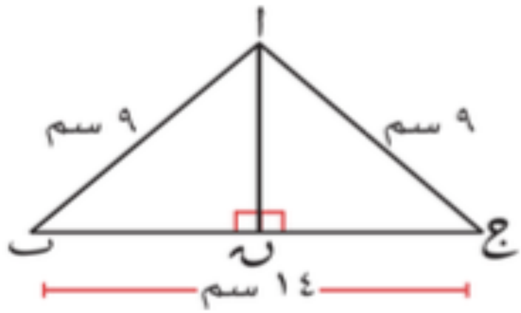
علي	محمد
$\text{جا}(٨٢^\circ) = \frac{٣,٢}{\text{د}}$	$\text{ظا}(٨٢^\circ) = \frac{٣,٢}{\text{د}}$
$\text{د} = \frac{٣,٢}{\text{جا}(٨٢^\circ)}$	$\text{د} = \frac{٣,٢}{\text{ظا}(٨٢^\circ)}$
د= ٣٢م = ٣٢٠٠ سم	د= ٠,٤٥م = ٤٥ سم

أيهما إجابته صحيحة؟ ☐علي ☐محمد ،برر إجابتك

وضح خطوات حلك:

نشاط جماعي-٢: رقم (٤) كتاب الطالب صفحة ٨٥

مثلّـــث متطابق الضلعَين أطوال أضـــلاعـه ٩ سم، ٩ سم، ١٤ سم كما في الشكل المجاور.



صل كل عبارة من العمود الأول بما يناسبها من العمود الثاني:

طول $\overline{\text{أن}}$	٥,٧ سم
ق (ب أ̂ ن)	٧ سم
ق (ج أ̂ ب)	٣٨,٩°
ق (ج̂)	٥١,١°
	١٠٢,٢°

١١-٥ زاوية الاتّجاه من الشمال

مثــال ١٥

يبيّن قياس زاوية اتّجاه المدينة (ب) بالنسبة إلى المدينة (أ) ٠٤٨°. ما قياس زاوية اتّجاه المدينة (أ) بالنسبة إلى المدينة (ب)؟

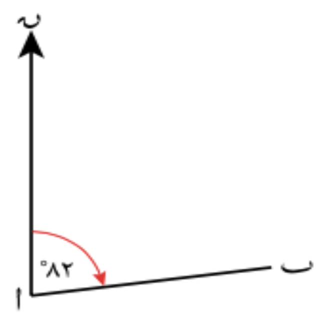
تمارين ١١-٥

١) أوجد قياس زاوية الاتجاه من الشمال، المؤلفة من ثلاثة أرقام في كل من الحالات الآتية:

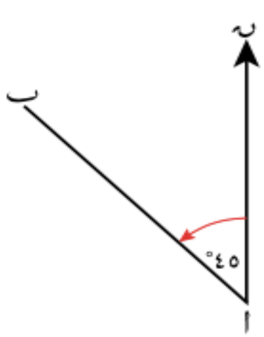
أ الغرب　　　ب جنوب شرق　　　ج شمال شرق

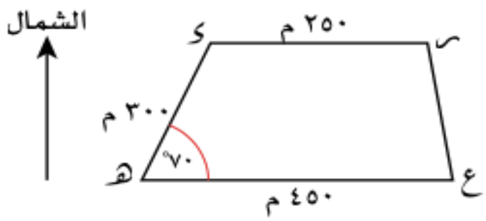
٢) اكتب قياس زاوية الاتجاه من الشمال، المؤلفة من ثلاثة أرقام للنقطة ا من النقطة ب في كلّ حالة من الحالتين الآتيتَين:

أ



ب





٧) يمثّل المخطّط المجاور الحقل هـ ع س د على مستوى سطح الأرض. ويمثّل الضلعان هـ ع، س د اتّجاه الشرق.

أ اكتب زاوية اتّجاه د من النقطة هـ.

ب احسب المسافة العمودية بين د س، هـ ع.

ج احسب بالمتر المربّع مساحة الحقل هـ ع س د.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

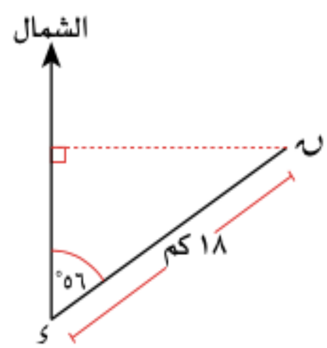
....

....

....

....

....



٥) تبعد القرية (ن) عن القرية (د) مقدار ١٨ كم بزاوية اتجاه من الشمال قياسها ٥٦°.

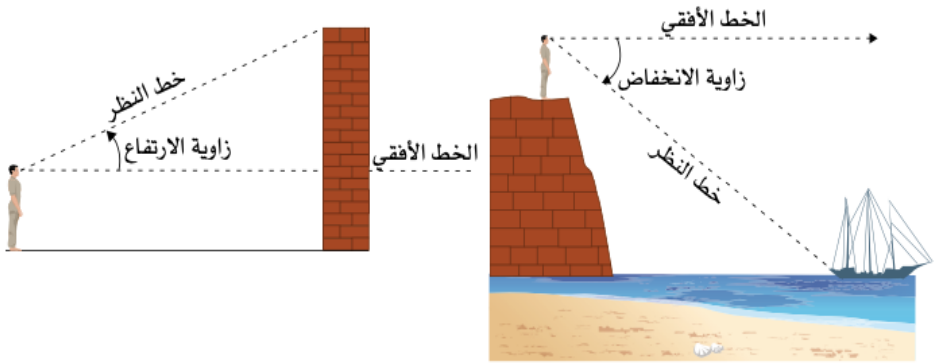
أ احسب بُعد النقطة ن إلى الشمال من النقطة د.

ب احسب بُعد النقطة ن إلى الشرق من النقطة د.

١١-٦ زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض

تُقاس زوايا الارتفاع والانخفاض دائمًا مع الأفق.

غالبًا ما تتضمّن مسائل النسب المثلّثية أجسامًا مرتفعة أو أشياء منخفضة، مثل قمّة البناء والطائرة والسفينة. في هذه الحالات، تقع زاوية الارتفاع أو زاوية الانخفاض بين الخط الأفقي وخط النظر إلى الجسم.

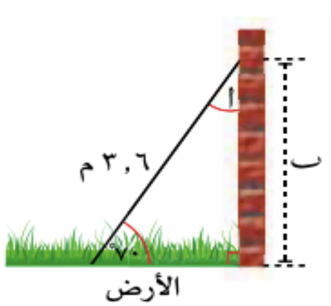


- يتم رسم الخط الأفقي بدءًا من مستوى نظر الشخص.
- تسمى الزاوية الواقعة تحت الخط الأفقي بزاوية الانخفاض.
- تسمى الزاوية الواقعة فوق الخط الأفقي بزاوية الارتفاع.

تمارين ١١-٦

١) يبلغ طول طريق منحدر ٢٨ م، ويبلغ قياس زاوية ارتفاعه ١٥°. ما ارتفاع قمّة الطريق المنحدر عن سطح الارض؟

٢) يبيّن الشكل المجاور سلّمًا طوله ٣,٦ م.
يرتكز أحد طرفَيه على أرض أفقية، ويرتكز طرفه الآخر على جدار رأسي بزاوية ارتفاع قياسها ٧٠°



أ ما قياس الزاوية التي يشكّلها السلّم مع الجدار (أ)؟
ب احسب بُعد نقطة ارتكاز قمة السلّم على الجدار (ب) عن قاعدة السلم؟

٤) ترتفع قمّة صخرة ٨٦ م عن سطح البحر. وتبعد سفينة ١٧٥ م عن قاعدة الصخرة. احسب قياس زاوية ارتفاع قمّة الصخرة من السفينة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....