* ضرب المصفوفات

$(١ \cdot ١) + (١ \cdot ١) + (١ \cdot ١)$ ٢+٢+٢

٣×٢

$(٣ \cdot ٣) = (١ \cdot ١)\,٣$

ضرب قياسي

← الضرب القياسي :

← هو ضرب عدد في مصفوفة

مثال : $\boxed{م}\begin{pmatrix} جـ & ب \\ هـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} م \times جـ & م \times ب \\ م \times هـ & م \times د \end{pmatrix}$

← دائماً يكون على يمين المصفوفة

$\left\{ ل = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} ،\ ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \right.$

أوجد ل + ل + ب + ب + ب

٣ب ٢ل

مثال : $\begin{pmatrix} جـ & أ \\ د & ب \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} جـ & أ \\ د & ب \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} جـ & أ \\ د & ب \end{pmatrix}$

$$٣\begin{pmatrix} جـ & أ \\ د & ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣جـ & ٣أ \\ ٣د & ٣ب \end{pmatrix}$$

مثال : $٦\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times ٦ \\ ٠ \times ٦ \\ ٤ \times ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٨ \\ ٠ \\ ٢٤ \end{pmatrix}$

$$-٣\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & -٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ \times ١ & -٣ \times ٢ \\ -٣ \times -٦ & -٣ \times -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٣ & -٦ \\ ١٨ & ١٥ \end{pmatrix}$$

لدينا المصفوفتان سـ = (٦ −١٠ ٤) ، صـ = (٣ ٥ −٧) أوجد المصفوفة

أ ٣سـ + ٢صـ

ب $\frac{1}{2}$سـ − ٣صـ

أ) ٣(٦ −١٠ ٤) + ٢(٣ ٥ −٧)

= (٣×٦ ٣×−١٠ ٣×٤) + (٢×٣ ٢×٥ ٢×−٧)

= (١٨ −٣٠ ١٢) + (٦ ١٠ −١٤)

= (١٨+٦ −٣٠+١٠ ١٢+−١٤)

= (٢٤ −٢٠ −٢)

ب) $\frac{1}{2}$(٦ −١٠ ٤) − ٣(٣ ٥ −٧)

= ($\frac{1}{2}$×٦ $\frac{1}{2}$×−١٠ $\frac{1}{2}$×٤) − (٣×٣ ٣×٥ ٣×−٧)

= (٣ −٥ ٢) − (٩ ١٥ −٢١)

= (٣−٩ −٥−١٥ ٢−−٢١)

= (−٦ −٢٠ ٢٣)

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} س & ف \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٧ & ١٣ \\ غ & ص \end{pmatrix}$ ، ٢أ + ٣ب = $\begin{pmatrix} -٢٧ & ٥١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أوجد القيم ف، س، ص، غ:

$$\begin{pmatrix} -٢٧ & ٥١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = ٣\begin{pmatrix} -٧ & ١٣ \\ ع & ص \end{pmatrix} + ٢ \times \begin{pmatrix} س & ف \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -٢٧ & ٥١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢١ & ٣٩ \\ ٣ع & ٣ص \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢س & ٢ف \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$$

$٢س + -٢١ = -٢٧$

$-٢٧ + ٢١ = ٢س$

$\frac{-٦}{٢} = \frac{٢س}{٢}$

$س = -٣$

$٠ + ٣ص = ٣$

$\frac{٣ص}{٣} = \frac{٣}{٣}$

$ص = ١$

$٨ + ٣ع = -٤$

$٣ع = -٤ - ٨$

$\frac{٣ع}{٣} = \frac{-١٢}{٣}$

$ع = -٤$

تمارين ٧-٣أ

١) أوجد ناتج ما يلي:

أ $٢\begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٦\\٨\end{pmatrix}$

ب $٥\begin{pmatrix}٦ & -٢ & ٢\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}٣٠ & -١٠ & ١٠\end{pmatrix}$

ج $٧\begin{pmatrix}٣ & ١\\ -٢ & ٠\end{pmatrix}$

د $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}٠ & ٨ & ١٢\\ ٩ & ١٠ & -٢\end{pmatrix}$

هـ $-٤\begin{pmatrix}-٢\\ -٣\end{pmatrix}$

٢) في المصفوفات المدرجة أدناه:

أ = $\begin{pmatrix}٣\\ -٢\\ ٩\end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix}٤ & ٠\\ -١٢ & ٢\\ ٣ & -١٤\end{pmatrix}$، ج = $\begin{pmatrix}-٨\\ ١\\ ٦\end{pmatrix}$، د = $\begin{pmatrix}-٧ & ٤\\ -٢ & ٣\end{pmatrix}$، هـ = $\begin{pmatrix}١ & -٦\\ -٥ & ٠\end{pmatrix}$، و = $\begin{pmatrix}٣ & ٠ & ١٢\\ -١٥ & ٦ & -٣\end{pmatrix}$

أوجِد ناتج ما يلي إن أمكن.

أ ٢أ − $\begin{pmatrix}١١\\ -٣\\ ٣\end{pmatrix}$

ب ٣د + $\begin{pmatrix}١٣ & -٢\\ ٩ & -٦\end{pmatrix}$

ج ٢ب + و

د ٢ج + ٣أ

هـ ٥هـ − ٣د

و أ + ج + $\frac{١}{٢}$ب

ز $\frac{٢}{٣}$و

٣) ل = $\begin{pmatrix}-٣٠ & ٢٥\\ ٥ & -١٥\end{pmatrix}$، ن = $\begin{pmatrix}٦ & -٨\\ -١٢ & ٤\end{pmatrix}$، أوجد:

أ ٢ن + $\begin{pmatrix}-٣٦ & ٣٣\\ ١٧ & -١٩\end{pmatrix}$

ب ن − ٢ل

ج $\frac{١}{٥}$ل + $\frac{١}{٢}$ن

د $\frac{٣}{٤}$ن − $\frac{٤}{٥}$ل

٤) أوجِد، في كل ممّا يلي، قيمة العدد القياسي ك:

أ $\begin{pmatrix}-١٦ & ٦\\ -٨ & -١٠\end{pmatrix}$ = ك $\begin{pmatrix}-٢٤ & ٩\\ -١٢ & -١٥\end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix}٥١ & ١٨\\ -٢٥,٥ & -٩\end{pmatrix}$ = ك $\begin{pmatrix}٣,٤ & ١,٢\\ -١,٧ & -٠,٦\end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix}٥,١ & -٦\\ -٠,٢٧ & ٩\end{pmatrix}$ = ك $\begin{pmatrix}-٣,٤ & ٤\\ ٠,١٨ & -٦\end{pmatrix}$

٥) أ أوجِد قيمَتي س، ص إذا كان $\begin{pmatrix}٢س\\٧\end{pmatrix} + ٤\begin{pmatrix}٥\\ص\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١٦\\٢٥\end{pmatrix}$

ب أوجِد قيم أ، ب، جـ إذا كان $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}أ & -٨ & ١٢\end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix}٩ & -ب & ٣جـ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٢ & ٠ & ٢١\end{pmatrix}$

جـ أوجِد قيم ل ، ق، ر، ز إذا كان $\begin{pmatrix}-١٣ & ق\\٩ & ز\end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix}٦ & ١\\ر & -٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥ل & ٣\\١٥ & ٤ز\end{pmatrix}$

٦) في المصفوفات $\underline{س} = \begin{pmatrix}أ & ب\\-٥ & ٨\end{pmatrix}$، $\underline{ص} = \begin{pmatrix}٤ & ١٥\\-٣ & جـ\end{pmatrix}$، $\underline{غ} = \begin{pmatrix}٩ & -٦\\د & ٥\end{pmatrix}$

أوجِد قيم أ، ب، جـ، د إذا كان $٤\underline{س} + ٣\underline{ص} - ٢\underline{غ} = ٢\begin{pmatrix}١١ & ٢٤\\-١٤ & ٢\end{pmatrix}$

الحل

٢) في المصفوفات المدرجة أدناه:

$\underline{أ} = \begin{pmatrix}٣\\-٢\\٩\end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix}٠ & ٤\\٢ & -١٢\\-١٤ & ٣\end{pmatrix}$، $\underline{جـ} = \begin{pmatrix}-٨\\١\\٦\end{pmatrix}$، $\underline{د} = \begin{pmatrix}٤ & -٧\\٣ & -٢\end{pmatrix}$، $\underline{هـ} = \begin{pmatrix}-٦ & ١\\٠ & -٥\end{pmatrix}$، $\underline{و} = \begin{pmatrix}١٢ & ٠ & ٣\\-٣ & ٦ & -١٥\end{pmatrix}$

أوجِد ناتج ما يلي إن أمكن.

أ $٢\underline{أ} - \begin{pmatrix}١١\\-٣\\٢\end{pmatrix}$

ب $٣\underline{د} + \begin{pmatrix}-٢ & ١٣\\-٦ & ٩\end{pmatrix}$

جـ $٢\underline{ب} + \underline{و}$

د $٢\underline{جـ} + ٣\underline{أ}$

هـ $٥\underline{هـ} - ٣\underline{د}$

و $\underline{أ} + \underline{جـ} + \frac{١}{٢}\underline{ب}$

ز $\frac{٢}{٣}\underline{و}$

لا يمكن الجمع

* ضرب مصفوفة بأخرى :

جمع (نفس رتبة)
ضرب

أ = (٢ ، ٥ ، ٣) ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

صف × عمود = ١ × ٣ ‏‏ صف × عمود = ٣ × ١

في الرياضيات عند ضرب ٣ × ٥ = ١٥

وعند ضرب ٥ × ٣ = ١٥

في مصفوفات أ × ب ≠ ب × أ

لكن عند ضرب أ × ب ≠ ب × أ

لـ عند الضرب يجب التأكد من :

رتبة أ = ١ × ٣ (صف ١ ، عمود ٣)

رتبة ب = ٣ × ١ (صف ٣ ، عمود ١)

عملية الضرب ← ضرب صف في عمود

أ × ب

أ = (١ . ٢) ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٢ \\ & ٣ \end{pmatrix}$

أ = (١ . ٢ . ٣) ، ب = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$

أ × ب = (١ × ١ + ٣ × ٠ + ٤ × ٢)

= (٩) = ١ × ١

مثال:

أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ -٦ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ -٣ & ٦ & ٥ \\ ٢ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$

أ × ب

= ٢ × ٣ = ٢ × ٣

-٢×٥ + ٤×-٣ + ١×٢   -٢×٢ + ٤×٦ + ١×٩   -٢×١ + ٤×٥ + ١×-٣

-٦×٥ + ٥×-٣ + ٣×٢   -٦×٢ + ٥×٦ + ٣×٩   -٦×١ + ٥×٥ + ٣×-٣

= أ × ب

٢ × ٣

ص أ ٢ × ٣   ٣ × ٤ ب عمود

= ٢ × ٤

أ ب ≠ ب أ

المصفوفتان المربعتان غ = $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ه = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$

أ أوجِد الضرب غ ه

ب أوجِد الضرب ه غ

ج بيّن أن غ ه − ه غ ليست مصفوفة صفرية.

غ = $\begin{pmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ه = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ١- \end{pmatrix}$ ٢×٢

غ ه = $\begin{pmatrix} ٠×٢- + ٥×٣ & ١-×٢- + ١×٣ \\ ٠×١ + ٥×٢ & ١-×١ + ١×٢ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١٥ & ٥ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

صف × عمود

$$أ = \begin{pmatrix} ٧ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} \quad ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٦ & ١ & ٥ \end{pmatrix}$$

٣ × ٣

$$أ \times ب = \begin{pmatrix} ٦×٧+٣×١+٤×٤ & ١×٧+٢×١+٣×٤ & ٥×٧+٤×١+٠×٤ \\ ٦×٠+٣×٢+٤×٥ & ١×٠+٢×٢+٣×٥ & ٥×٠+٤×٢+٠×٥ \\ ٦×٥+٣×٣+٤×٠ & ١×٥+٢×٣+٣×٠ & ٥×٥+٤×٣+٠×٠ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = م$$

المصفوفة المحايدة (م)

لـ ٢×٢ رتبة

$أ = م \times أ$

$أ = (١) \times أ$

$أ = (م) \times أ$

$٥ = ١ \times ٥$

$٦ = ١ \times ٦$

$٧ = ١ \times ٧$

م ← محايدة

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

* المصفوفة المحايدة
(من الرتبة ٢×٢)

لو عند ضرب عدد في واحد يطلع نفس العدد
إلهنا المصفوفة المحايدة كأنو الضرب
في واحد .

$$\begin{pmatrix} \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٠} \end{pmatrix} = \text{م}$$

أ × م = أ

$$\begin{pmatrix} \text{٠} & \text{٣} \\ \text{٥-} & \text{٧} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٠} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{٣} \\ \text{٥-} & \text{٧} \end{pmatrix}$$

مصفوفة
محايدة

إذا كان $٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -جـ & ٤د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$، فأوجِد قيم أ، ب، جـ، د .

٥) لدينا:

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س & ٢ \\ -٣ & ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$، أوجِد قيمتَي س، ص.

ب $\begin{pmatrix} ٢ل & -٣ \\ ٥ & ق \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$، أوجِد قيمتَي ل، ق.

ج $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ + ١ & -٢ \\ ٥ & ب - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$، أوجِد قيمتَي أ، ب.

د $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -١٢ \\ -٨ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ص & ٢س \\ ص - ١ & ع + ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$، أوجِد قيم س، ص، ع.

$\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -١٢ \\ -٨ & ١٨ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٢ & -٦ \\ -٤ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ص & ٢س \\ ص - ١ & ع + ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

ص − −٢ = ٢ ، ص = ٢ − ٢ ، $\boxed{ص = ٠}$

ص − ١ − ٣ = −٤ ، ص = −٤ + ١ + ٣ ، ص = ٠

٢س − ٤ = −٦ ، ٢س = −٦ + ٤ ، $\boxed{س = -١}$

ع + ٣ − −٢ = ٩ ، ع = ٩ − ٣ − ٢ ، $\boxed{ع = ٤}$

إذا كان ٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ١- & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ب & أ \\ ٤د & -جـ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢- & ١ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$، فأوجِد قيم أ، ب، جـ، د .

$\begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ١- & ٣- \end{pmatrix} ٢ = \begin{pmatrix} ب+-٢ & أ+١ \\ ٤د+٠ & -جـ+٣ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١٤ & ٨ \\ ٢- & ٦- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ب+-٢ & أ+١ \\ ٤د & ٣+جـ- \end{pmatrix}$

أ: أ + ١ = ٨ ، أ = ٨ - ١ ، $\boxed{أ = ٧}$

ب: ب - ٢ = ١٤ ، ب = ١٤ + ٢ ، $\boxed{ب = ١٦}$

جـ: ٣ + -جـ = -٦ ، ٣ + ٦ = جـ ، ٩ = جـ

د: $\frac{٤د}{٤} = \frac{-٢}{٤}$ ، $\boxed{د = \frac{-١}{٢}}$

ب $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ل \\ ق & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦- & ٨ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix}$، أوجِد قيمتَي ل، ق.

$\begin{pmatrix} ٣- & ٢ل \\ ق & ٥ \end{pmatrix} × ٢\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٦- & ٨ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- & ٢ل \\ ق & ٥ \end{pmatrix} ٢$

$\begin{pmatrix} ٦- & ٨ \\ ٣ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦- & ٤ل \\ ٢ق & ١٠ \end{pmatrix}$

ق: $\frac{٢ق}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ، ✓ $ق = \frac{٣}{٢}$

ل: $\frac{٤ل}{٤} = \frac{٨}{٤}$ ، $\boxed{ل = ٢}$