الصف الثاني عشر (أساسي)

الوحدة الخامسة:

التكامل

المحتويات

الوحدة الخامسة: التكامل

(رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي
وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِّن لِّسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي)

الوحدة الخامسة
التكامل
Integration

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥–١ تفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، وتجد تكامل دوال في الصيغة أس$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن، ما عدا –١) بالإضافة إلى تكامل جمع وطرح هذه الدوال.

٥–٢ تحسب ثابت التكامل.

٥–٣ تحسب التكامل المحدود.

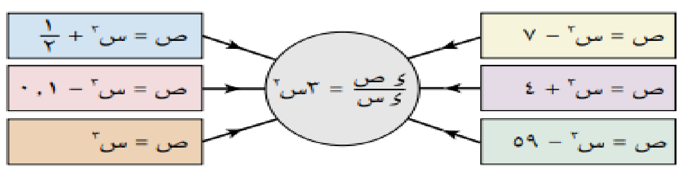
٥–١ التكامل: العملية العكسيّة للتفاضل

تعلّمت في الوحدة الثانية إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما يكون المنحنى ص معلومًا، وإيجاد د$'$(س) عندما تكون د(س) معطاة، نسمي هذا عملية الاشتقاق:

إذا كان ص = س$^{\text{ن}}$، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن س$^{\text{ن}-١}$

إذا كان د(س) = س$^{\text{ن}}$، فإن د$'$(س) = ن س$^{\text{ن}-١}$

عند تطبيق هذا القانون على الدوال في الصيغة ص = س^{٢} + جـ، نحصل على:



يبيّن هذا الشكل وجود عدد غير قابل للعد من الدوال التي تعطي الإجابة ٣س^{٢} عند إيجاد مشتقتها. كل هذه الدوال في الصيغة ص = س^{٣} + جـ أو د(س) = س^{٣} + جـ، حيث جـ عدد ثابت.

ستتعلم في هذه الوحدة عن العملية العكسية للتفاضل التي تعطيك ص عندما تكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ معطاة، وتعطيك د(س) عندما تكون د$'$(س) معطاة.

تسمى العملية العكسية للتفاضل **التكامل Integration**.

نستنتج أن:

نتيجة ١

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{\text{ن}}$، فإن ص = $\frac{١}{\text{ن}+١}$ س$^{\text{ن}+١}$ + جـ، حيث جـ **ثابت التكامل (ثابت اختياري)** **Constant of integration (Arbitrary constant)**، ن $\neq$ −١

إذا كان د$'$(س) = س$^{\text{ن}}$، فإن د(س) = $\frac{١}{\text{ن}+١}$ س$^{\text{ن}+١}$ + جـ، حيث جـ ثابت التكامل، ن $\neq$ −١

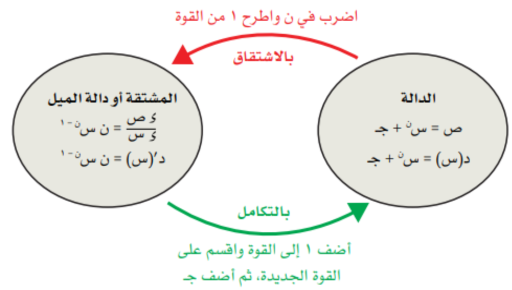
مُساعَدة

يسمى الثابت جـ 'اختياري' لأن قيمته غير محددة؛ يمكن أن يكون أيّ عدد.

أضف واحدًا إلى القوة ن، ثم اقسم على القوة الجديدة وأضف ثابت التكامل جـ

يبيّن المخطط الآتي عملية التفاضل وعمليتها العكسية (التكامل).

مادة الرياضيات الفصل الأول للصف الثاني عشر (أساسي)



تمارين ٥-١

١) أوجد ص عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تساوي:

أ $\text{س}^{٦}$ **ب** $\text{س}^{٢٤}$

هـ $\text{س}^{١١,٥}$ **و** $\text{س}^{-٥}$

٢) أوجد د (س) عندما د′(س) تساوي:

أ $\text{س}^{١}$ **ب** $\text{س}^{٠}$

هـ $\text{س}^{\frac{٣}{٨}}$ **و** $\sqrt{٧}$

٥-٢ التكامل غير المحدود

ستتعلّم في هذا الدرس التكامل غير المحدود الذي ينتج من إيجاد تكامل دوال القوى، وصيغٍ تتضمن جمع دوال القوى وطرحها وضربها.

٥-٢أ تكامل دوال القوة

يستخدم الرمز $\int$ للإشارة إلى التكامل.

عندما نريد إيجاد تكامل س^{٣} مثلًا، نكتب $\int$ س^{٣} ؤ س

يسمى $\int$ س^{٣} ؤ س **التكامل غير المحدود Indefinite integral** لـ س^{٣}

نكتب ؤ س بعد س^{٣} لنشير إلى أننا نجد التكامل بالنسبة إلى المتغير س

عندما نجد تكامل دالة قوة، يجب أن تكتب في الصيغة س^{ن}

مُساعَدة

س^{أ} × س^{ب} = س$^{أ+ب}$

س^{أ} ÷ س^{ب} = س$^{أ-ب}$

س$^{-أ}$ = $\frac{١}{س^{أ}}$

$\sqrt[ب]{س^{أ}}$ = س$^{\frac{أ}{ب}}$

نتيجة ٢

$\int$ س^{ن} ؤ س = $\frac{١}{ن + ١}$ س$^{ن+١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ −١

تعني النتيجة ٢ أنه عندما نجد تكامل دالة الميل $\frac{ؤ ص}{ؤ س}$، نحصل على الدالة بالإضافة إلى ثابت هو جـ، أي أن:

$\int$ $\frac{ؤ ص}{ؤ س}$ ؤ س = ص + جـ

$\int$ د$'$(س) ؤ س = د(س) + جـ

تمارين ٥-٢أ

١) أوجد د (س) باستخدام التكامل لكل من الآتي:

أ د$'$(س) = س^{٤}

د د$'$(س) = $\frac{١}{س^{٨}}$

٢) أوجد ص بدلالة س لكل من الآتي:

ج $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}^{٢١}}$ د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}$

٣) أوجد كلًا من الآتي:

أ $\int \text{س}^{١٠٥}\,\text{ءس}$ ب $\int (\text{س}^{١٠} \div \text{س})\,\text{ءس}$ ج $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٥}}\,\text{ءس}$ د $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس}$

٥-٢ب تكامل دوال القوة المضروبة في ثابت وجمع وطرح دوال القوة

عندما تكون الدالة التي نريد إيجاد تكاملها عبارة عن ثابت مضروب في دالة قوة، نجد تكامل دالة القوة ونضرب النتيجة في الثابت.

نتيجة ٣

$\int \text{ك د(س)}\,\text{ءس} = \text{ك} \int \text{د(س)}\,\text{ءس}$، حيث ك عدد ثابت.

إذا أردنا إيجاد تكامل مجموع أو طرح دوال القوى، يمكننا إيجاد تكامل الدوال بشكل منفصل، ثم نجمع النتائج أو نطرح بحسب المطلوب.

نتيجة ٤

$\int [\text{د(س)} \pm \text{هـ(س)}]\,\text{ءس} = \int \text{د(س)}\,\text{ءس} \pm \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

تمارين ٥-٢ب

١) أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int ٧س^{٦}\, ءس$ **ب** $\int ١٢س^{٢}\, ءس$ **ز** $-\int \frac{٣٦}{س^{٧}}\, ءس$ **ح** $\int \frac{٣\sqrt{س}}{س}\, ءس$

هـ $\int ١٠س^{-٣}\, ءس$ **و** $\int ٤س^{-٩}\, ءس$

الحل:

٢) أوجد التكاملات غير المحدودة للدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير س:

ج $ح(س) = \frac{٨}{٥}س^{-٥}$ **د** $ك(س) = -\frac{٢}{٣}س^{-٣}$

ز $ل(س) = \frac{٢١س^{٣}}{\sqrt{س}}$ **ح** $ق(س) = \frac{\sqrt{س}}{٣\sqrt[٢]{س}}$

الحل:

٣) أوجد:

أ $\int (س^{٥} + س^{٢})\,ءس$

ب $\int (س - س^{٤})\,ءس$

د $\int (٣س^{٥} - ٤س^{٣})\,ءس$

هـ $\int \left(٦س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}\right)ءس$

ز $\int س(٣س + ٥)\,ءس$

ح $\int (س + ١)(س - ١)\,ءس$

الحل:

٤) أوجد تكامل الدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير س:

أ $\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}$

ب $\text{هـ}(\text{س}) = -\frac{٨}{\text{س}^{٣}} + ٢\text{س}$

ج $\text{ح}(\text{س}) = (٣ - \text{س})(٤ - \text{س})$

د $\text{ك}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}^{٣}}{\text{س}}$

هـ $\text{م}(\text{س}) = \frac{٢ - \text{س}}{\text{س}^{٣}}$

و $\text{ن}(\text{س}) = ١ + ٤\text{س} - ٩\text{س}^{٢} + ١٦\text{س}^{٣}$

الحل:

٥) أوجد تكامل ص بالنسبة إلى المتغير س لكل من الآتي:

أ $\text{ص} = \text{س}\left(٤ - \frac{١}{\text{س}}\right)$

ب $\text{ص} = \text{س}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٤}} - \frac{٧}{\text{س}^{٣}}\right)$

ج $\text{ص} = \text{س}^{٣}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٣}} - ١٥\text{س}\right)$

الحل:

مثال ١٢

لديك الدالتان د (س) = $س^٣ - \frac{٤}{س^٣}$ ، هـ (س) = $س^٣ - \frac{٢}{س^٣}$

أوجد تكامل مجموع الدالتَين د (س) ، هـ (س).

الحــلّ:

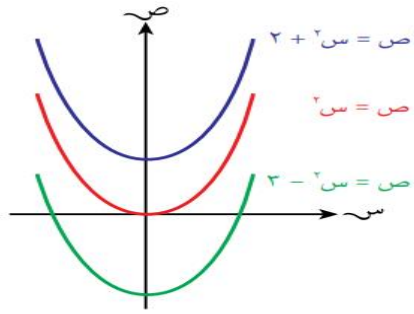
٦) لديك الدالتان د (س) = $٨ - \frac{٣}{س^٤}$ ، هـ (س) = $٣ + \frac{٩}{س^٤}$

إذا كان ح(س) = د (س) – هـ (س)، فأوجد التكامل غير المحدود للدالة ح(س).

٣-٥ حساب ثابت التكامل

عند إيجاد تكامل دالة ما، يجب أن نضمَن نتيجة ثابت التكامل لأنه يوجد عدد غير قابل للعد من الدوال التي يمكن أن يكون لها دالة الميل نفسها، مهما كانت دالة الميل.

يبيّن التمثيل البياني أدناه ثلاثة منحنيات، لكل منها دالة ميل هي $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س أو د´(س) = ٢س



ومع أن للمنحنيات دالة الميل نفسها، إلا أن معادلاتها مختلفة.

يوجد عدد غير قابل للعد من المنحنيات التي يكون لها $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س، مثل ص= س٢ − ٩٩٩، ص= س٢ + ١٠٠١، وهكذا.

لهذه المنحنيات الشكل نفسه، ولكن ليس لها الموقع نفسه. إذا مر أحد المنحنيات بالنقطة (س١، ص١)، فإن باقي المنحنيات لن تمر بهذه النقطة.

تميز قيمة ثابت التكامل جـ كل منحنى منها من باقي هذه المنحنيات، ويمكن إيجاد جـ إذا عرفنا دالة الميل وإحداثيات نقطة على المنحنى.

أما إذا عرفنا دالة الميل وقيمة جـ، فبإمكاننا إيجاد معادلة منحنى معيّن.

تمارين ٥-٣

١) بمعلومية $\frac{ءص}{ءس}$ وإحداثيات النقطة ل على المنحنى، أوجد معادلة المنحنى لكل مما يلي:

ب $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س٢ ؛ ل(٢، ٩)

د $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س٢ + ٨س − ١ ؛ ل(٣، ١٠٠)

و $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢س^{٣} - ٤}{س^{٢}}$ ؛ ل(−٤، ١٢)

٢) لديك الدالة د (س) بحيث د′(س) = ١٠س^{٤} + ١٢س^{٣} ، د (−٢) = ١١٢، أوجد د (س).

٣) للدالة ص = ك(س) دالة ميل هي ك′(س) = ٣ − ٨س − ١٢س^{٢}

أوجد الدالة ك(س)، بحيث يمر منحنى ص = ك(س) بالنقطة (−٣، ٥٠).

٤) منحنى الدالة هـ معطى بحيث هـ′(س) = ٨ − ٣س

إذا مر منحنى ص = هـ(س) بالنقطة (٦، −٢)، فأوجد:

أ الدالة هـ(س).

ب قيمة ب بحيث تقع النقطة (٢، ب) على منحنى ص = هـ(س).

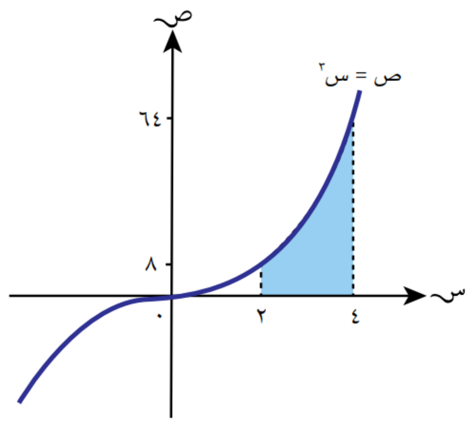
٥-٤ التكامل المحدود

تذكّر أن $\int$ س^{٣} ءس = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + جـ، حيث جـ عدد ثابت، يسمى التكامل غير المحدود لـ س^{٣} بالنسبة إلى المتغير س

التكامل المحدود definite integral هو القيمة التي تنتج من إيجاد تكامل دالة بين قيمتَين محددتَين للمتغير س، وتسمى الحدَّين الأدنى والأعلى للتكامل.

يكتب التكامل المحدود للدالة س^{٣} بالنسبة إلى المتغير س بين الحد الأدنى س = ٢، والحد الأعلى س = ٤، في الصيغة $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ءس

تعطي قيمة التكامل المحدود $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ءس فعليًا المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٣} ومحور السينات من س = ٢ إلى س = ٤، كما يبيّن التمثيل البياني المجاور.



تبيّن الخطوات الآتية طريقة إيجاد قيمة التكامل المحدود $\int_{٢}^{٤}$ س^{٣} ءس:

الخطوة ١	أوجد تكامل س^{٣}
الخطوة ٢	عوّض الحد الأعلى س = ٤ في نتيجة الخطوة ١
الخطوة ٣	عوّض الحد الأدنى س = ٢ في نتيجة الخطوة ١
الخطوة ٤	اطرح نتيجة الخطوة ٣ من نتيجة الخطوة ٢

يبيّن الحل الآتي الخطوات الأربع أعلاه:

$$\int_{٢}^{٤} \text{س}^{٣}\,\text{ءس} = \left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{جـ}\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٤} \times ٤^{٤} + \text{جـ}\right) - \left(\frac{١}{٤} \times ٢^{٤} + \text{جـ}\right)$$

$$= ٦٤ + \text{جـ} - (٤ + \text{جـ})$$

$$= ٦٤ + \text{جـ} - ٤ - \text{جـ}$$

$$= ٦٠$$

لاحظ أن جـ المضافة مرتَين تلغي نفسها، لذا فمن غير الضروري ضمهما إلى الحل.

يمكن استخدام الخطوات من الجدول السابق لإيجاد التكامل المحدود لأية دالة.

يمكن كتابة طريقة إيجاد التكامل المحدود كالآتي:

نتيجة ٥

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} = \Big[\text{د}(\text{س})\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{د}(\text{ب}) - \text{د}(\text{أ})$$

حيث د(س) تكامل د′(س).

يمكن أيضًا استخدام القوانين التي أعطيت في النتيجتَين ٣، ٤ في خطوات إيجاد التكامل المحدود:

نتيجة ٦

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} = \text{ك}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$$

حيث ك عدد ثابت.

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \Big[\text{د}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\Big]\,\text{ء}\,\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$$

تمارين ٥-٤

١) أوجد قيمة كل من الآتي:

أ) $\int_{1}^{2} 6\,\text{س}^2\,\text{ء}\,\text{س}$

ب) $\int_{2}^{5} (4\,\text{س}^3 + 2\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

د) $\int_{1}^{4} 2(5\,\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ء}\,\text{س}$

هـ) $\int_{-4}^{0} \frac{10\,\text{س}^4 - 21\,\text{س}^3}{\text{س}}\,\text{ء}\,\text{س}$

ز) $\int_{2}^{8} \frac{20}{\text{س}^2}\,\text{ء}\,\text{س}$

ح) $\int_{2}^{4} \left(10 - \frac{16}{\text{س}^3}\right)\text{ء}\,\text{س}$

٢) لديك الدالة د(س) = $\frac{١٠}{س^٣}$ + ٤س، أوجد قيمة $\int_{١}^{٢}$ $\frac{١}{٣}$ د(س)ءس

٣) لديك $\int_{-١}^{٤}$(ك − ٢س)ءس = ٢٥ ، أوجد قيمة العدد الصحيح ك

٤) لديك الدالتان د(س) = ١٢س + س^٢، هـ(س) = ٤س − ٣س^٢

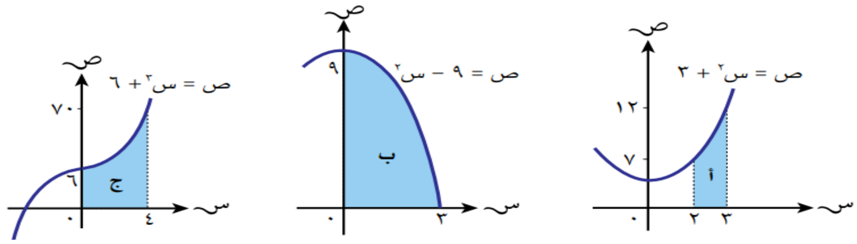
أوجد قيمة $\int_{-٢}^{-١}$(د(س) − هـ(س))ءس

٥) تبيّن التمثيلات البيانية أدناه، منحنيات ثلاث دوال.

ظللت مساحة تحت كل منحنى وعُلِّمت بالأحرف أ، ب، ج

مُساعَدة

لم يتم رسم التمثيلات البيانية في السؤال ٥ حسب المقياس



احسب القيمة الدقيقة للمساحة المظللة في كل تمثيل بياني من خلال إيجاد قيمة كل تكامل محدود من الآتي:

أ للمساحة أ، احسب $\int_{٢}^{٣} (س^{٢} + ٣)\, ء س$

ب للمساحة ب، احسب $\int_{٠}^{٣} (٩ - س^{٢})\, ء س$

ج للمساحة ج، احسب $\int_{٠}^{٤} (س^{٣} + ٦)\, ء س$

الحل:

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

التفاضل

إذا كان ص = $س^{ن}$، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ن $س^{ن-١}$

إذا كان د(س) = $س^{ن}$، فإن د$'$(س) = ن $س^{ن-١}$

التكامل كعملية عكسية للتفاضل

إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = $س^{ن}$، فإن ص = $\frac{١}{ن+١}$ $س^{ن+١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ -١

إذا كان د$'$(س) = $س^{ن}$، فإن د(س) = $\frac{١}{ن+١}$ $س^{ن+١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ -١

التكامل غير المحدود

$\int$ $س^{ن}$ ءس = $\frac{١}{ن+١}$ $س^{ن+١}$ + جـ، حيث جـ ثابت، ن $\neq$ -١

$\int$ ك د(س) ءس = ك $\int$ د(س) ءس، حيث ك عدد ثابت.

$\int$ [د(س) $\pm$ هـ(س)] ءس = $\int$ د(س) ءس $\pm$ $\int$ هـ(س) ءس

التكامل المحدود

$\int_{أ}^{ب}$ د$'$(س) ءس = $[د(س)]_{أ}^{ب}$ = د(ب) - د(أ)، حيث د(س) تكامل د$'$(س).

$\int_{أ}^{ب}$ ك د(س) ءس = ك $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس، حيث ك عدد ثابت.

$\int_{أ}^{ب}$ [د(س) $\pm$ هـ(س)] ءس = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس $\pm$ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أوجد ص بدلالة س، إذا كان:

أ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥س^{٤} - ٢س$

ب $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨}{س^{٥}} + ٦س$

٢) أوجد د(س) بدلالة س، إذا كان:

أ $د'(س) = س^{-٢}$

ب $د'(س) = ٨س^{-٠,٦}$

ج $د'(س) = س^{٢} \times ٢\sqrt{س}$

٣) أوجد $\int (١٢س^{٢} - ٣س^{٥})\, ءس$

٤) أوجد $\int س(٤ - ٢س)\, ءس$

٥) لديك الدالتان $د(س) = ١٠س^{٢} - ٢$ ، $هـ(س) = ٧ - ٨س^{٢}$

أوجد:

أ $\int (د(س) + هـ(س))\, ءس$

ب $\int (د(س) - هـ(س))\, ءس$

٦) لديك $د'(س) = ٦س - ٢س^{٢}$ ، $د(٣) = ٠,٥$ ، أوجد د(س).

٧) لديك منحنى بحيث $\frac{ءص}{ءس} = ٧ - ٣\sqrt{س}$، وأن المنحنى يمر بالنقطة (٤، ٥٠)، فأوجد معادلة المنحنى.

٨) أحسب قيمة كل من الآتي:

أ $\int_{١}^{٢} (٩س^{٢} - ٦س)\, ءس$

ب $\int_{-١}^{١} ٢س(س + ٣)\, ءس$