٦-٦ المساحة تحت منحنى الدالة Area under a curve

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات

نتيجة ١١

أ ≤ س ≤ ب

- إذا كانت د (س) متصلة، وكانت د (س) ≥ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$$ ، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

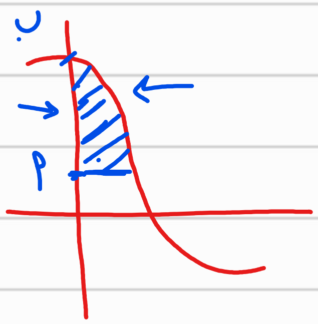
- إذا كانت د (س) متصلة، وكانت د (س) ≤ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ ، س = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

$$ن = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$$ ؛ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

- إذا تغيرت إشارة الدالة د(س) عند س = ج على الفترة [أ ، ب]، فإن المساحة الإجمالية م تُعطى بالعلاقة:

$$م = م_{١} + م_{٢} = \left| \int_{أ}^{ج} د(س)\, ءس \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(س)\, ءس \right|$$

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور الصادات



نتيجة ١٢

- إذا كانت د(ص) متصلة، وكانت د (ص) ≥ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ ، ص = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(ص)\, ءص \right|$$ ، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

- إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت د (ص) ≤ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ ، ص = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

$$ن = \left| \int_{أ}^{ب} د(ص)\, ءص \right|$$ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

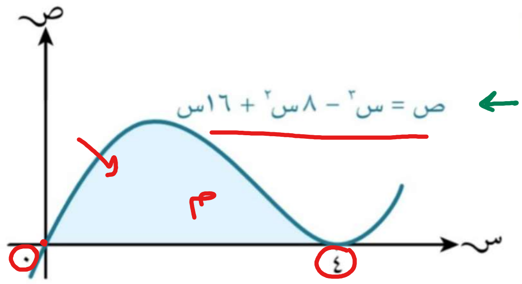
- إذا تغيرت إشارة د(ص) عند ص = ج على الفترة [أ ، ب]، فإن المساحة الإجمالية تُعطى بالعلاقة:

$$م = م_{١} + م_{٢} = \left| \int_{أ}^{ج} د(ص)\, ءص \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(ص)\, ءص \right|$$

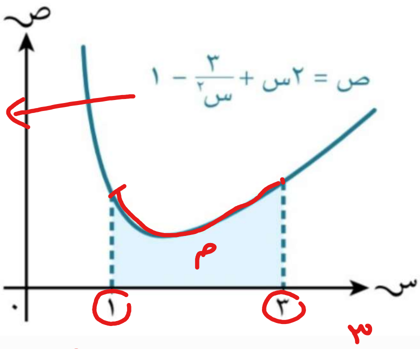
تمارين ٦-٦

١) أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل ممّا يأتي:

أ



ب



ص = ٢س + ٣س$^{-2}$ − ١

م = $\int_{0}^{4}$ (س^3 − ٨س^2 + ١٦س) ء س

= $\left[\frac{\text{س}^4}{4} - \frac{8\text{س}^3}{3} + \frac{16\text{س}^2}{2}\right]_0^4$

= $\left(\frac{1}{4} \times 4^4 - \frac{8}{3} \times 4^3 + 8 \times 4^2\right)$ − صفر

= ٢١ $\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

م = $\int_{1}^{3}$ (٢س + ٣س$^{-2}$ − ١) ء س

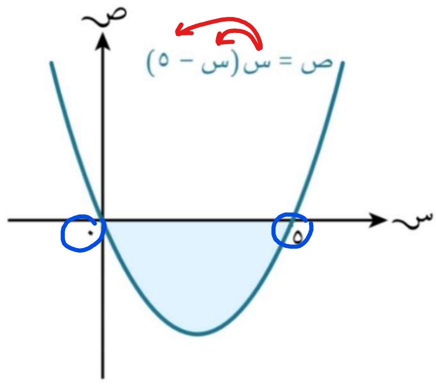
م = $\left[\frac{2\text{س}^2}{2} + \frac{3\text{س}^{-1}}{-1} - \text{س}\right]_1^3$

= $\left[\text{س}^2 - \frac{3}{\text{س}} - \text{س}\right]_1^3$

= (٩ − ١ − ٣) − (١ − ٣ − ١)

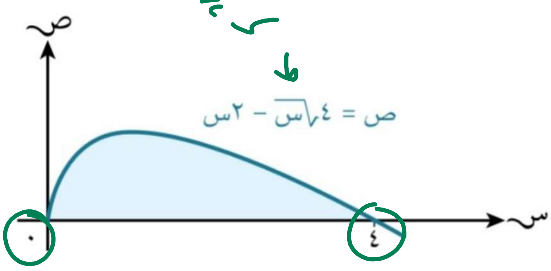
= ٨ وحدات مربعة

ج



د

$\frac{1}{2}$

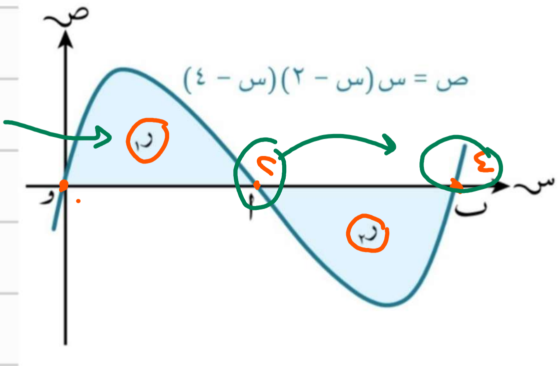


م = $\left|\int_{0}^{5} (\text{س}^2 - 5\text{س})\, ء\text{س}\right|$

م = $\left|\left[\frac{\text{س}^3}{3} - \frac{5\text{س}^2}{2}\right]_0^5\right|$

= $\left|\left(\frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{5}{2} \times 5^2\right) - (\text{صفر})\right|$

= $\left|\frac{-125}{6}\right|$ = ٢٠ $\frac{5}{6}$ وحدة مربعة.



٢) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة
ص = س(س − ٢)(س − ٤)
الذي يقطع محور السينات في النقاط و(٠، ٠)،
أ(٢، ٠)، ب(٤، ٠).
بيّن، مستخدمًا التكامل، أن مساحة المنطقة ر١ تساوي
مساحة المنطقة ر٢.

$$\text{ص} = \text{س}\left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٢\text{س} + ٨\right) = \text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س}$$

$$\text{مساحة ر}_{١} = \int_{٠}^{٢} \left(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right) \, د\text{س}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٦\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٨\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} = \left[\tfrac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \left(\tfrac{١}{٤}\times ٢^{٤} - ٢\times ٢^{٣} + ٤\times ٢^{٢}\right) - \text{صفر} = ٤ \text{ وحدات مربعة}$$

$$\text{مساحة ر}_{٢} = \left|\int_{٢}^{٤} \left(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right) د\text{س}\right| = \left|\left[\tfrac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right]_{٢}^{٤}\right|$$

$$= \left|\left[\left(\tfrac{١}{٤}\times ٤^{٤} - ٢\times ٤^{٣} + ٤\times ٤^{٢}\right) - (٤)\right]\right|$$

$$= |-٤| = ٤ \text{ وحدات مربعة}$$

$$\text{مساحة ر}_{١} = \text{مساحة ر}_{٢}$$

٣) أوجد المساحة المحصورة بين كل من المنحنيات الآتية، ومحور السينات:

أ) ص = $\boxed{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)}$ $= \text{س}\left(\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣\text{س} - ٣\right) = \text{س}\left(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣\right)$

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$$

* نوجد نقاط التقاطع مع المحور (س):

$\boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\text{س} - ٣ = ٠$ أو $\text{س} + ١ = ٠$

$\boxed{\text{س} = ٣}$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$

س = −١ ، ٠ ، ٣

$$\text{م} = \left|\int_{-١}^{٠} \left(\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right) د\text{س}\right| + \left|\int_{٠}^{٣} \left(\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right) د\text{س}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{٠}\right| + \left|\left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٣}\right|$$

$$= \left|\text{صفر} - \left(\tfrac{١}{٤} + \tfrac{٢}{٣} - \tfrac{٣}{٢}\right)\right| + \left|\left(\frac{٣^{٤}}{٤} - \frac{٢\times ٣^{٣}}{٣} - \frac{٣\times ٣^{٢}}{٢}\right) - \text{صفر}\right| =$$

د) ص = (س − ١)(س + ١)(س − ٤)

٤) أوجد المساحة المحصورة بين كل ممّا يأتي:

أ) المنحنى ص = س^٣ ومحور الصادات، والمستقيمَين ص = ٨، ص = ٢٧

نكتب س بدلالة ص : $\sqrt[3]{ص} = \sqrt[3]{س^{3}}$

$س = \sqrt[3]{ص}$

$س = ص^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{ص^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{ص}\right)^{4}}$

* المساحة = $\int_{8}^{27} ص^{\frac{1}{3}} \, دص$

$= \left[\frac{3 ص^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_{8}^{27} = \left(\frac{3}{4} \times 27^{\frac{4}{3}}\right) - \left(\frac{3}{4} \times 8^{\frac{4}{3}}\right)$

$= \frac{195}{4}$ وحدة مربعة.

ب المنحنى $\boxed{س = ص^{٢} + ١}$، ومحور الصادات، والمستقيمين ص = −١، ص = ٢

* المساحة = $\left| \int_{-١}^{٢} (ص^{٢} + ١) \, د ص \right|$

$= \left| \left[ص + \frac{ص^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{٢} \right| = \left(\frac{٨}{٣} + ٢\right) - \left(\frac{-١}{٣} - ١\right)$

= ٦ وحدات مربعة

٥) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\sqrt{٢س + ١}$.
إذا كانت المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى،
ومحور الصادات، والمستقيم ص = ٣، فأوجد مساحة
المنطقة المظللة.