٦-٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين

Area bounded by a curve and a line or by two curves

إذا تقاطع منحنيا دالتين عند س = أ، س = ب، فإن المساحة م المحصورة بين المنحنيَين تعطى كما يأتي:

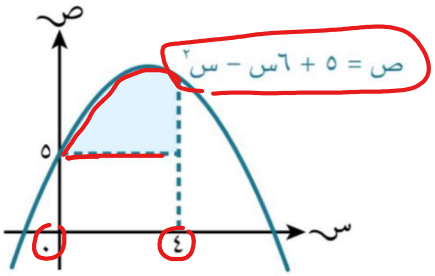
نتيجة ١٣

$$م = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\,ى\,س - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ى\,س\right| \quad \text{أو} \quad م = \left|\int_{أ}^{ب} (د(س) - هـ(س))\,ى\,س\right|$$

يمكنك إيجاد المساحة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيين بدون استخدام المطلق من خلال تكامل (الدالة الأعلى – الدالة الأسفل) أو باستخدام المطلق بدون ترتيب الدالتين.

تمارين ٦-٧

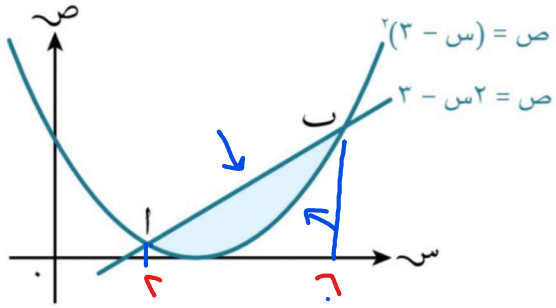
١) في الشكل المجاور: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٥ + ٦س – س²، والمستقيمَين س = ٤، ص = ٥



المساحة = $\int_{٠}^{٤} (٥ + ٦س - س^{٢} - ٥)\,د\,س = \int_{٠}^{٤} (٦س - س^{٢})\,د\,س$

$= \left[٦\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٤} = \left[(٣ \times ٤^{٢} - \frac{١}{٣} \times ٤^{٣}) - (\text{صفر})\right] = \frac{٤٨}{٣}$ وحدة مربعة

٢) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = (س – ٣)²، والمستقيم ص = ٢س – ٣ اللذَين يتقاطعان في النقطتَين أ، ب. أوجد مساحة المنطقة المظللة.



نوجد نقاط التقاطع

$(س - ٣)^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩$

$٢س - ٣ = س^{٢} - ٦س + ٩$

$س^{٢} - ٨س + ١٢ = ٠$

$(س - ٦)(س - ٢) = ٠$

$س = ٦$ أو $س = ٢$

المساحة $= \int_{٢}^{٦} [(٢س - ٣) - (س - ٣)^{٢}]\,د\,س$

$= \int_{٢}^{٦} (٢س - ٣ - س^{٢} + ٦س - ٩)\,د\,س$

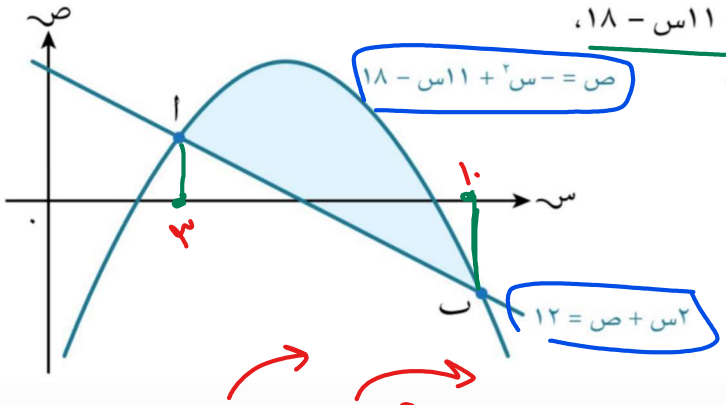
$= \int_{٢}^{٦} (-س^{٢} + ٨س - ١٢)\,د\,س$

المساحة = $\int_{-6}^{-2} (-س^2 + 3س - 12)\, د س = \left[-\frac{1}{3}س^3 + \frac{3}{2}س^2 - 12س \right]_{-6}^{-2}$

$= \left[\left(-\frac{1}{3} \times -8 + \frac{3}{2} \times 4 + 24\right) - \left(-\frac{1}{3} \times -216 + \frac{3}{2} \times 36 - 72\right) \right]$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

٣) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = −س² + ١١س − ١٨، والمستقيم ٢س + ص = ١٢ اللذين يتقاطعان في النقطتَين أ، ب.
أوجد مساحة المنطقة المظللة.



$ص = -س^2 + 11س - 18$
$ص = 12 - 2س$

$-س^2 + 11س - 18 = 12 - 2س$
$س^2 - 13س + 30 = 0$
$(س - 10)(س - 3) = 0$
$س = 10$ ، $س = 3$

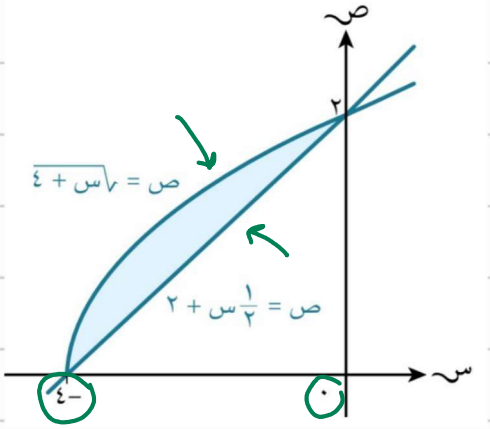
المساحة = $\int_{3}^{10} [(-س^2 + 11س - 18) - (12 - 2س)]\, د س$

$= \int_{3}^{10} (-س^2 + 13س - 30)\, د س$

$= \left[-\frac{1}{3}س^3 + \frac{13}{2}س^2 - 30س \right]_{3}^{10}$

$= \left(-\frac{1}{3} \times 1000 + \frac{13}{2} \times 100 - 300\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 27 + \frac{13}{2} \times 9 - 90\right)$

$= \frac{343}{6}$ وحدة مربعة



٦) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = √(س + ٤)،
والمستقيم ص = ½ س + ٢ حيث يتقاطعان في
النقطتَين (-٤، ٠)، (٠، ٢).
أوجد مساحة المنطقة المظللة.

المساحة = $\int_{-٤}^{٠} (\sqrt{س+٤}) - (\frac{١}{٢}س + ٢)\, د س$

$= \int_{-٤}^{٠} (س+٤)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}س - ٢)\, د س$

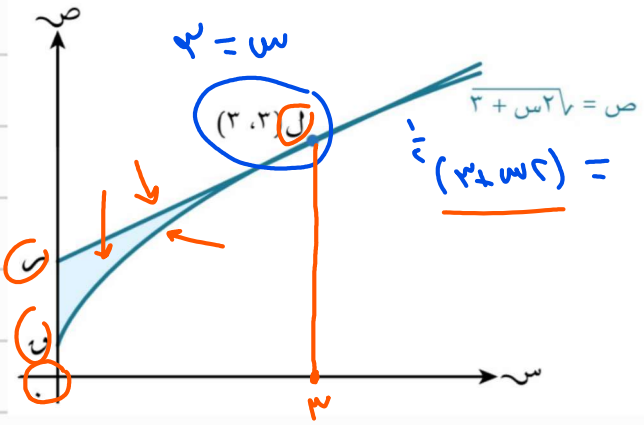
$= \left[\frac{٢(س+٤)^{\frac{٣}{٢}}}{١ \times ٣} - \frac{١}{٤}س^{٢} - ٢س\right]_{-٤}^{٠}$

$= \left(\frac{٢}{٣} \times ٤^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(-\frac{١}{٤} \times (-٤)^{٢} - ٢ \times (-٤)\right) = \frac{٤}{٣}$ = ١ ١/٣ وحدة مربعة

٧) في الشكل المجاور: المنحنى ص = √(٢س + ٣)،
والمماس له عند النقطة ل(٣، ٣) يقطعان
مع محور الصادات في النقطتَين و، ر
على الترتيب. أوجد:

أ معادلة مماس المنحنى عند النقطة ل.

ب مساحة المنطقة المظللة ل و ر.



س = ٣

ص = $(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}$

أ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢}(٢س+٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢س+٣}}$

عند س = ٣ ⇐ ميل المماس = $\frac{١}{\sqrt{٢ \times ٣ + ٣}} = \frac{١}{٣}$

معادلة المماس هي:

ص - ٣ = $\frac{١}{٣}$(س - ٣)

ص = $\frac{١}{٣}$س - ١ + ٣

ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢

ب) المساحة = $\int_{٠}^{٣} (\frac{١}{٣}س + ٢) - (٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}\, د س$

$= \left[\frac{١}{٢ \times ٣}س^{٢} + ٢س - \frac{(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times ٢}\right]_{٠}^{٣}$

$= \left(-\frac{١}{٦} \times ٣^{٣} + ٢ \times ٣ - \frac{١}{٣}(٢ \times ٣ + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right) - (-\frac{٣}{٢}٣ \times \frac{١}{٣})$

= ٢ ٢/٣ وحدة مربعة