٦-٨ حجوم الأجسام الدورانية Volumes of revolution

نتيجة ١٤

حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة ص = د (س) حول محور السينات دورة كاملة ٣٦٠°
بين القيمتَين س = أ، س = ب يعطى بالعلاقة: ع = $\pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢}$ و س

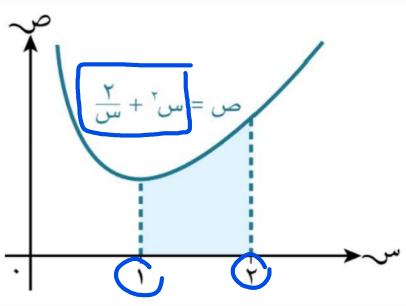
نتيجة ١٥

حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة س = د (ص) حول محور الصادات دورة كاملة ٣٦٠°
بين القيمتَين ص= أ، ص = ب يعطى بالعلاقة: ع = $\pi \int_{أ}^{ب} س^{٢}$ و ص

تمارين ٦-٨

١) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات في كل ممّا يأتي:

أ



$ح = \pi \int_{١}^{٢} ص^{٢}$ د س

$= \pi \int_{١}^{٢} (\frac{٢}{س} + س^{٢})^{٢}$ د س

$= \pi \int_{١}^{٢} (\frac{٤}{س^{٢}} + ٤ + س^{٤})$ د س

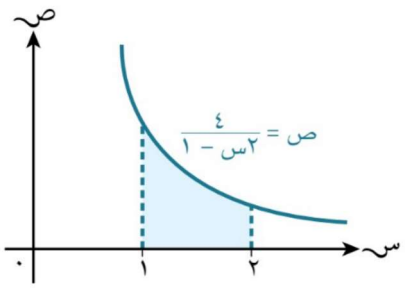
$= \pi [-٤ س^{-١} + ٤ س + \frac{١}{٥} س^{٥}]_{١}^{٢}$

$= \pi [(-٢ + ٨ + \frac{٣٢}{٥}) - (-٤ + ٤ + \frac{١}{٥})]$

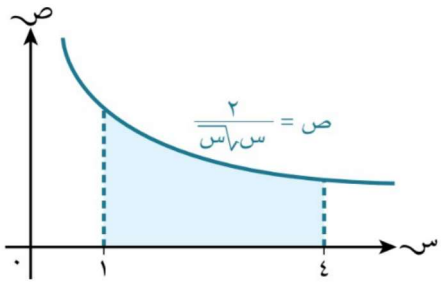
$= \pi \times \frac{٦٠}{٥} = \frac{٦٠}{٥} \pi$ وحدة مكعبة

$\frac{٤}{س^{٢}} + ٤ + س^{٤} = \frac{٤}{س^{٢}} + ٤ + س^{٤}$

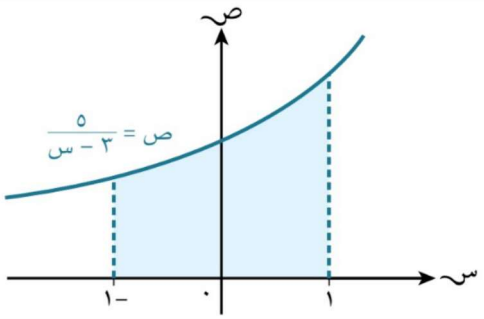
ب



ج

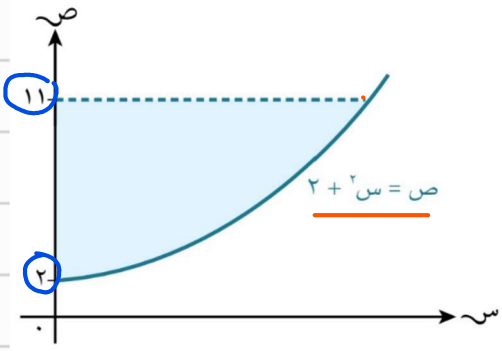


د



٢) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور الصادات في كل ممّا يأتي:

أ



* نكتب س بدلالة ص :

ص = س٢ + ٢

س٢ = √(ص − ٢)

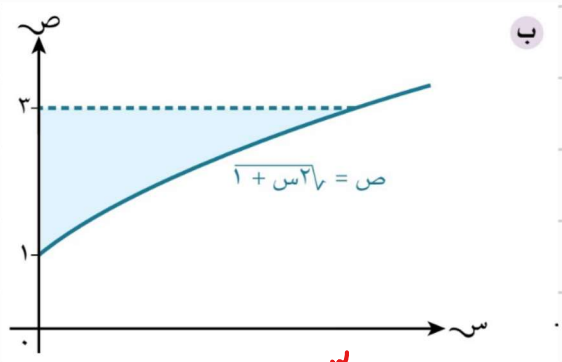
س = √(ص − ٢)

ح = ∫ من ٢ إلى ١١ π (√(ص − ٢))٢ د ص = π ∫ من ٢ إلى ١١ (ص − ٢) د ص

= π [½ ص٢ − ٢ص] من ٢ إلى ١١ = π [(½ × ١١٢ − ٢ × ١١) − (½ × ٢٢ − ٢ × ٢)]

= ٨١/٢ π وحدة مكعبة

ب



$ص' = (\sqrt{٢س+١})'$

$ص' = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س+١}}$

$ص'^{٢} = ٢س + ١ \Leftarrow ٣س = ص'^{٢} - ١$

$س = \frac{ص'^{٢}-١}{٣}$

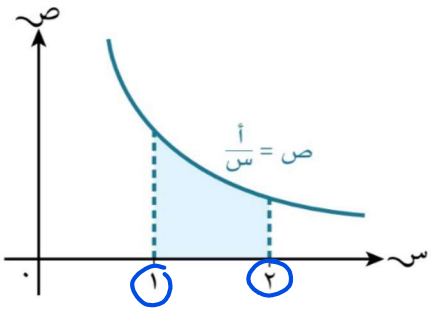
$ح = \pi \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{٣}(ص'^{٢}-١)\right)^{٢} د ص = \pi \int_{١}^{٣} \frac{١}{٩}(ص'^{٤} + ١ - ٢ص'^{٢}) د ص$

$= \frac{\pi}{٩} \int_{١}^{٣} (ص'^{٤} - ٢ص'^{٢} + ١) د ص = \frac{\pi}{٩}\left[\frac{١}{٥}ص'^{٥} - \frac{٢}{٣}ص'^{٣} + ص\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{\pi}{٩}\left[\left(\frac{١}{٥} \times ٣^{٥} - \frac{٢}{٣} \times ٣^{٣} + ٣\right) - \left(\frac{١}{٥} - \frac{٢}{٣} + ١\right)\right] = \frac{١٢٤}{١٥}\pi$ وحدة مكعبة

٣) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = $\frac{أ}{س}$، أ > ٠

إذا علمت أن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات يساوي ١٨π، فأوجد قيمة أ.



$ح = \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{أ}{س}\right)^{٢} د س = \pi \int_{١}^{٢} \frac{أ^{٢}}{س^{٢}} د س$

$= أ^{٢}\pi \int_{١}^{٢} س^{-٢} د س = أ^{٢}\pi \left[\frac{س^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= أ^{٢}\pi \left[\frac{-١}{س}\right]_{١}^{٢} = أ^{٢}\pi\left(\frac{-١}{٢} - (-١)\right) = \frac{أ^{٢}}{٢}\pi$

$\therefore ٢ \times \frac{أ^{٢}}{٢}\pi = ١٨\pi \times ٢$

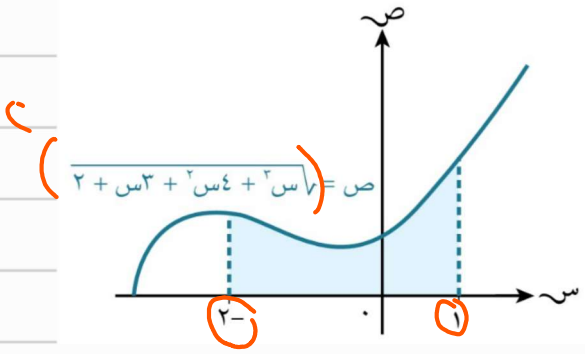
$أ^{٢} = ٢ \times ١٨$

$أ^{٢} = ٣٦ \Leftarrow أ = ٦$

٤) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى

$ص = \sqrt{س^٣ + ٤س^٢ + ٣س + ٢}$

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات.



٥) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المستقيم $٣س + ٨ص = ٢٤$

إذا دارت المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات، فسينتج مخروط نصف قطر قاعدته ٣ وحدات، وارتفاعه ٨ وحدات.

أوجد حجم المخروط باستخدام:

أ) التكامل.

ب) صيغة حجم المخروط.