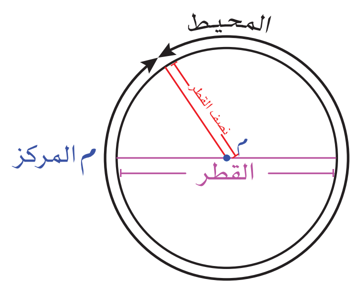
٢-١٦ مُحيط الدائرة ومساحتها

الدائرة شكل من الأشكال الهندسية الأساسية، حيث نرى الدائرة في كثير من المواقف الحياتية اليومية، فهي تظهر عند قيادة السيّارة، وفي مسارات الجري في السباق، وعند ممارسة رياضة كُرة السلة.

سابقًا

تعلَّمت أجزاء الدائرة في الوحدة ٤؛ يُذكِّرك المُخطَّط أدناه ببعض هذه الأجزاء. القطر مُستقيم يمرّ بمركز الدائرة، ويقسمها إلى نصفَين متساويَين.



سابقًا

π عدد **غير نسبي**. لقد تمَّت مناقشة خصائص الأعداد غير النسبية في الوحدة ٢

١٦-٢-أ مُحيط الدائرة

لاحظ أن القطر (ق) = ٢ × نصف القطر (نق)، وقد عرف الأغريق القُدماء أنهم يستطيعون إيجاد مُحيط الدائرة بضرب القطر في عدد مُحدَّد، ويُعرَف هذا العدد بـ π وهو حرف يوناني يُلفَظ 'باي' وقيمته تساوي تقريبًا ...٣,١٤١٥٩٢٦٥٤

يمكن إيجاد مُحيط الدائرة باستخدام قانون:

المحيط = π × القطر

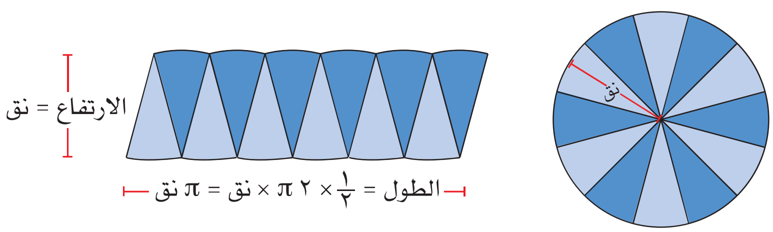
= π × ق (ق القطر)

= ٢ π × نق (نق نصف القطر)

١٦-٢-ب مساحة الدائرة

هناك صيغة بسيطة لإيجاد مساحة الدائرة. وفيما يلي طريقة تُبيّن كيف تم الوصول إلى هذه الصيغة:

اعتمد الدائرة المُبيَّنة في المُخطَّط أدناه، لقد تم تقسيمها إلى ١٢ جُزءًا متساويًا، وتم ترتيب هذه الأجزاء لتعطي المُخطَّط الأيسر:



بما أن أجزاء الدائرة صغيرة جدًّا، فإن الشكل يُشبِه إلى حد كبير مُتوازي أضلاع ارتفاعه يساوي نصف قطر الدائرة (نق)، وطوله يساوي نصف محيطها (π × نق).

وحيث أن قانون مساحة مُتوازي الأضلاع: م = ق ع، فإن:

مساحة الدائرة = $\frac{1}{2}$ × ٢ π × نق × نق (باستخدام قيَم ق، ع المُبيَّنة أعلاه)

= π نق^{٢} (بالتبسيط)

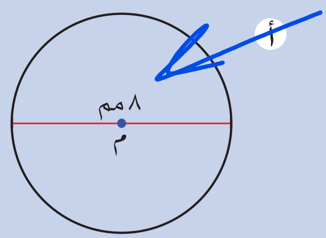
إذا جرَّبت ذلك بنفسك مع عدد أكبر من القطاعات الدائرية الصغيرة، فسوف تُلاحِظ أن الشكل (المُضلَّع) سيشبه إلى حدّ كبير المستطيل.

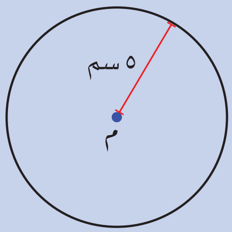
يُوضِّح ذلك (من دون أن يثبت) أن مساحة الدائرة تُعطى بالقانون: π نق^{٢}

سوف تُلاحظ في الأمثلة التالية كيفيَّة تطبيق هذه الصيَغ.

مثـــال ٥

احسب مُحيط ومساحة كلّ من الدائرتَين التاليتَين، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية:

أ


ب


الحـــلّ:

أ	المُحيط = π × ٨ = ...٢٥,١٣٢٧ = ٢٥,١ مم	المساحة = π × ٤^{٢} = π × ١٦ = ...٥٠,٢٦٥ = ٥٠,٣ مم^{٢}	المُحيط = π × القطر المساحة = π × نق^{٢} نق = $\frac{ق}{٢}$
ب	المُحيط = π × ١٠ = ...٣١,٤١٥ = ٣١,٤ سم	المساحة = π × ٥^{٢} = π × ٢٥ = ...٧٨,٥٣٩ = ٧٨,٥ سم^{٢}	المحيط = ٢ π × نق المساحة = π × نق^{٢}

استخدام الذاكرة في الآلة الحاسبة

تحتاج أحيانًا إلى استخدام العدد نفسه أكثر من مرة، قد تحتاج مثلاً إلى إيجاد إجابة ما، ثم استخدامها كجزء من حسابات لاحقة، وتجنّب إعادة كتابة العدد في كل مرّة.

يُلاحظ في أغلب الآلات الحاسبة، أنك إذا نقرت مفتاح المساواة، يمكنك إعادة استخدام الناتج عند القيام بكتابة حسابات جديدة، دون الحاجة إلى إعادة كتابته مرة أخرى.

وهذا يرجع إلى أن بعض الآلات الحاسبة تتضمّن مفتاحًا يُسمى 'ANS'، يُعيد كتابة الناتج السابق مباشرة.

كما تحتوي بعض الآلات الحاسبة على ذاكرة (تُسمّى 'M') بينما تحتوي بعض الآلات الحاسبة الأخرى على حروف أخرى (مثل A، B، C، D)، هذه المفاتيح تُمكّنك من كتابة عدد ما في الذاكرة، لتعود وتستخدمه لاحقًا في العمليات الحسابية المختلفة، لذا من المفيد أن تتحقّق من دليل آلتك الحاسبة لتعرف كيف تقوم بذلك.

سابقًا

يفرض ترتيب العمليات الحسابية الذي تعلّمته في الوحدة (١) إيجاد مُربَّع نصف القطر قبل الضرب في π

لاحظ أن المُعطى في الجُزئية أ هو القطر، في حين أن المُعطى في الجزئية ب هو نصف القطر. راقب بدقّة القياسات المُعطاة إليك قبل البدء بتنفيذ العمليات الحسابية.

مُساعَدة

تحتوي الآلة الحاسبة المفتاح $\boxed{\pi}$. إذا لم تجده، استخدم القيمة التقريبية ٣,١٤٢، لكن تأكَّد أن تكتب ذلك خلال الحل. تأكَّد من كتابة الإجابة النهائية الظاهرة على الحاسبة قبل التقريب، ثم اذكر درجة الدقّة التي استخدمتها في التقريب.

مثـــال ٦

أ استخدم آلتك الحاسبة لتجد قيمة ٤π − ١ في صورة عدد عشري، واكتب جميع الأرقام الظاهرة على الشاشة.

ب احسب قيمة ٢(٤π − ١)

الحــلّ:

أ ٤π − ١
= ١١٫٥٦٦٣٧٠٦١

قد تحتاج إلى نقر مفتاح S⇔D على بعض الآلات الحاسبة لتحويل القيمة الحقيقية إلى عدد عشري.

ب ٢(٤π − ١)
= ٢٣٫١٣٢٧٤١٢٣

يمكنك إعادة كتابة كل الأرقام.

أو يمكنك أن تكتب فقط (×٢) بعد ما تجد الناتج في الجزئية (أ).

أو يمكنك أن تخزنه في الذاكرة ثم تستدعيه، أو يمكنك أن تكتب 2 × ANS

انظر إلى الرقم الأخير. إذا ضاعفت إجابة الجزئية (أ)، ستنتهي بالرقم (٢)، في حين أن الرقم الأخير الموجود هو الرقم (٣).

يحدث ذلك لأن الآلة الحاسبة تتذكَّر معلومات أكثر مما يمكن عرضها على الشاشة. وأن إجابة الجزئية (أ) يجب أن تكون أكبر قليلاً مما عُرِض على الشاشة.

نق = $\frac{١٠٠}{٢π}$

نق = $\frac{٥}{٢π}$

نق = $\frac{\text{محيط الدائرة}}{٢π}$

مثـــال ٧

أوجد نصف قطر كلّ دائرة في كل مما يلي إذا كان محيطها (ح) معلومًا، ثم اكتب الناتج مُقرَّبًا إلى أقرب عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية:

أ ح = ١٠٠ سم　ب ح = ٥ م　ج ح = ٥٥ سم　د ح = ١٢٧ مم

الحــلّ:

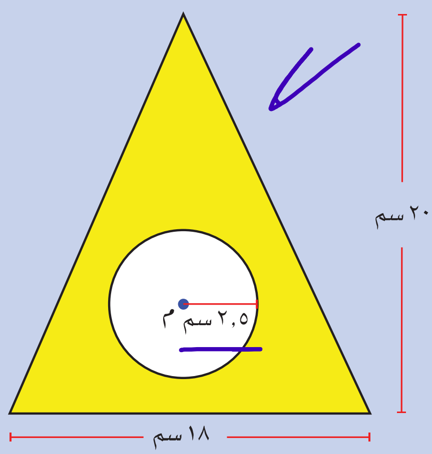
أ نق = $\frac{١٠٠}{٢π}$ = ١٥٫٩ سم

ابدأ بكتابة قانون محيط الدائرة بدلالة نق؛ قد تحتاج إلى استخدام الأقواس عند إدخال المقام في الآلة الحاسبة: ١٠٠ ÷ (٢ × π)

ب	احفظ ٢ × π في ذاكرة آلتك الحاسبة. يمكنك بعد ذلك تنفيذ: 5 ÷ M = ٠,٧٩٦م	عندما تحفظ ٢ × π في الذاكرة (والتي قد لا تكون الحرف M على آلتك الحاسبة)، سيكون حلّ باقي السؤال سريعًا جدًّا لأنه يتطلب فقط القسمة على ما تم تخزينه في الذاكرة، ولا يحتاج إلى إعادة كتابة الأقواس في كلّ مرة.
ج	٥٥ ÷ M = ٨,٧٥ سم	استخدم ذاكرة الآلة الحاسبة كما فعلت في الجزئية (ب).
د	١٢٧ ÷ M = ٢٠,٢ مم	استخدم ذاكرة الآلة الحاسبة كما فعلت في الجزئية (ب).

مثـــال ٨

أوجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في الشكل أدناه:



م = م. ن — م. د

م = ½ × ق × ع — π نق²

م = ½ ×

الحــلّ:

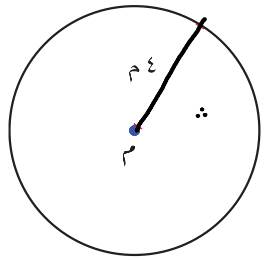
مساحة المنطقة المُظلَّلة = مساحة المُثلَّث – مساحة الدائرة. المساحة = $\frac{١}{٢}$ ق ع – π نق² = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٠ – π × (٢,٥)² = ١٦٠,٣٦٥... = ١٦٠ سم²	عوِّض عن قيَم ق، ع، نق استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج مقرَّبًا الإجابة إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

تمارين ١٦-٢-(أ، ب)

١) نق = $\frac{٢,١}{٢}$ = ١,٠٥

١) أوجد مساحة ومُحيط كلّ دائرة من الدوائر التالية:

أ



أ) نق = ٤

مساحة = π نق^2

= π (٤)^2

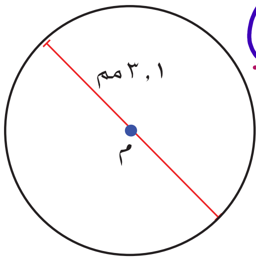
= ١٦ π = ٥٠,٢

محيط = ٢ π نق

= ٢ π (٤)

= ٨ π = ٢٥,١

ب

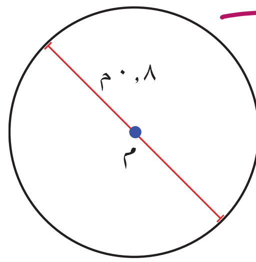


مساحة = π نق^2

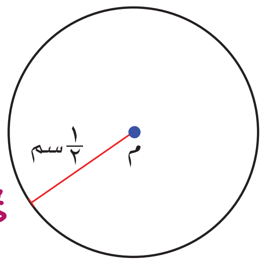
= π × (١,٠٥)^2

= ٣,٥

ج



د

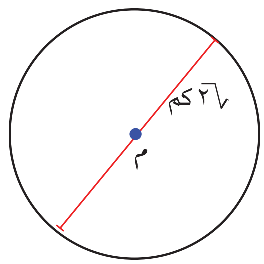


محيط = ٢ π نق

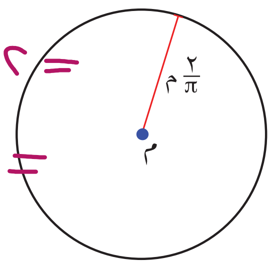
= ٢ π × (١,٠٥)

= ٦,٧

هـ



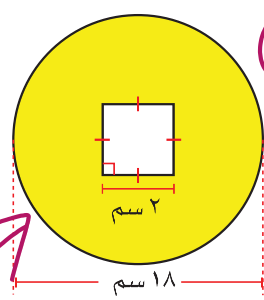
و



يكون مُفيدًا في بعض الحالات أن تكتب قيمتي نصف القطر والقطر في صورة أعداد عشرية قبل البدء بالحل، رغم أنك تستطيع إدخال القيَم الحقيقية كما هي بسهولة في أغلب الآلات الحاسبة الحديثة. إذا قمت بذلك، فإنك ستتجنَّب الأخطاء الناتجة من التقريب.

٢) احسب مساحة المنطقة المُظلّلة في كلّ حالة من الحالات التالية:

أ



نق = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩

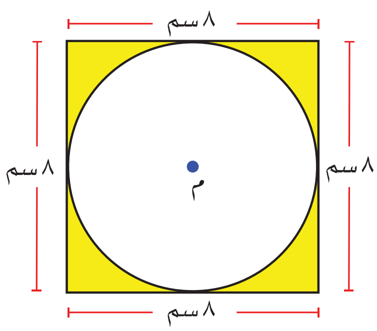
مساحة = م.د - م.ع

= π نق^2 - ل^2

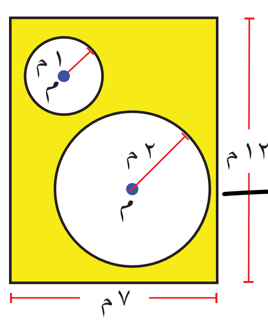
= π × (٩)^2 - (٢)^2

=

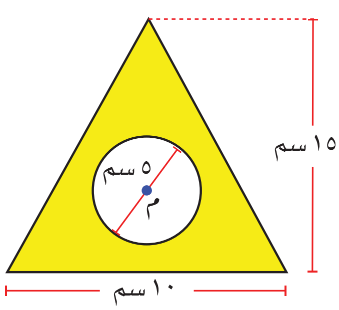
ب



ج



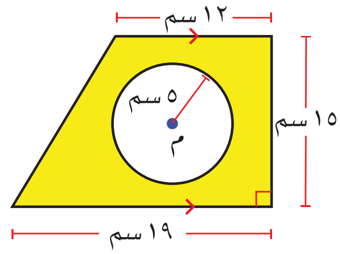
د



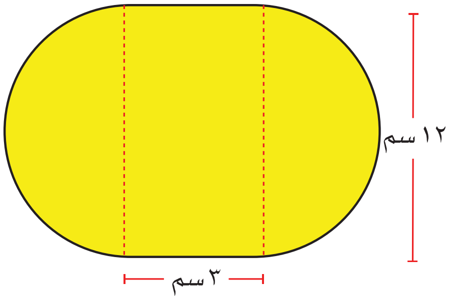
م = $\frac{1}{2}$ × ق × ع - π نق^2

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٥ - π ($\frac{٥}{٢}$)^2

هـ



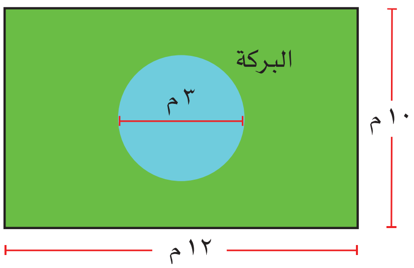
و



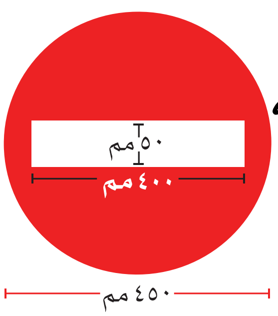
طبِّق مهاراتك

هذا مثال جيد على مسألة تحتاج فيها إلى إجراء مجموعة من العمليات الحسابية لتصل إلى الإجابة. رتِّب عملك بخطوات واضحة لتبيّن كيف توصّلت إلى الحل.

٣) يُبيِّن الرسم المُجاوِر مُخطَّطًا لحديقة مُستطيلة الشكل في داخلها بركة دائرية. يُريد صاحب الحديقة تغطية المساحة المُحيطة بالبركة بالعُشب. فإذا كان الكيس الواحد من بذور الأعشاب يغطي خمسة أمتار مُربَّعة من الحديقة، أوجد عدد أكياس البذور اللازمة لإتمام العمل.



٤) يُبيّن الرسم المُجاوِر إشارة مرور على الطريق بها لونان مختلفان.
احسب مساحة كلّ لون مُقرَّبة إلى أقرب عدد كامل.



٥) يُراد قصّ ست عشرة دائرة مُتطابقة من قطعة قماش مُربَّعة الشكل طول ضلعها ٠,٤ م. أوجد مساحة القماش المُتبقِّية مُقرَّبة إلى أقرب منزلتَين عشريَّتَين، إذا تمّ قصّ الدوائر بأكبر قطر ممكن.

٦) تتشارك آمنة وصديقتها في قرص بيتزا من القياس الكبير، قطر قرص البيتزا الكبير يساوي ٢٤ سم، وقرّرتا هذا الأسبوع أن تأكلا أقراصًا مختلفة من البيتزا، فطلبتا قرصَي بيتزا من القياس الصغير، قطر قرص البيتزا الصغير ١٢ سم. وهما ترغبان في معرفة ما إذا كان مجموع مساحتَي البيتزا في القرصَيْن الصغيرَيْن مساويًا لمساحة القرص الكبير أم لا. احسب لتجد الإجابة.

١٦-٢-ج الإجابة الدقيقة لمحيط ومساحة الدائرة بدلالة π

باي (π) عدد غير نسبي، أي ليس له قيمة كسرية أو عشرية دقيقة. لهذا السبب، لا تكون للحسابات التي تستخدم فيها قيمة تقريبية لـ 'π' نواتج دقيقة.

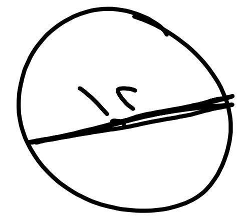
إذا طُلب إليك إيجاد إجابة دقيقة لحسابات تستخدم فيها π، عليك إيجاد الإجابة النهائية بدلالة π.

إذا أُعطيت مُحيط أو مساحة الدائرة بدلالة π، يمكنك عندها إيجاد طول القطر أو نصف القطر بالقسمة على π.

مثلاً، إذا كان المُحيط ح = ٥ π سم، سيكون القطر ٥ سم ونصف القطر ٢,٥ سم.

كذلك الأمر بخصوص المساحة، إذا كانت المساحة م = ٢٥π سم^{٢} فإن نق^{٢} = ٢٥ سم، نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم.

١٢ ÷ ٢ = ٦



مثال ٩

اكتب الناتج بدلالة π في كل ممّا يلي:

أ أوجد محيط دائرة قطرها ١٢ سم.

ب ما محيط دائرة نصف قطرها ٤ مم؟

ج أوجد مساحة دائرة قطرها ١٠ م.

د ما نصف قطر دائرة مُحيطها ٢,٨ π سم؟

محيط = ٢ π نق

= ٢ π × ٦

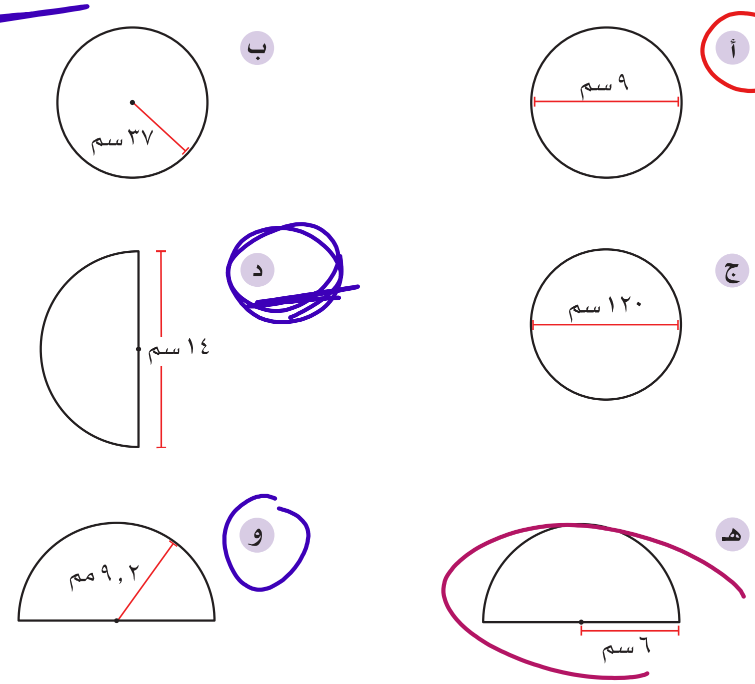
= ١٢ π

الحــلّ:

أ	ح = π ق ح = ١٢ π سم	عوّض عن ق بـ ١٢ سم، وتذكَّر أن تكتب وحدة القياس.
ب	ح = π ق ح = ٢ × ٤ × π = ٨ π مم	تذكَّر أن القُطر يساوي ٢ × نصف القطر
ج	م = π نق^{٢} نق = ٥ م، م = π × ٥^{٢} م = ٢٥ π م^{٢}	لتجد نصف القطر، اقسم القطر على ٢
د	ح = π ق فيكون، ق = $\frac{ح}{\pi}$ ق = $\frac{٢,٨\pi}{\pi}$ = ٢,٨ سم ∴ نق = ١,٤ سم	تذكَّر أن القُطر يساوي ٢ × نصف القطر

تمارين ١٦-٢-ج

١) أوجد مُحيط ومساحة كل دائرة من الدوائر التالية، واكتب الناتج بدلالة π:



نق = ٩/٢ = ٤,٥

مساحة = π نق²

= π (٤,٥)²

= ٢٠,٢٥ π

محيط = ٢ π نق

= ٢ π (٤,٥)

= ٩ π

٢) أوجد الناتج بدلالة π في كل حالة من الحالات التالية:

أ) مُحيط دائرة قطرها ١٠ سم.

ب) مُحيط دائرة نصف قطرها ٧ مم.

ج) مساحة دائرة قطرها ١,٩ سم.

د) مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها ٣ سم.

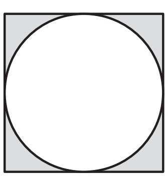
نق = ١,٩/٢ = ٠,٩٥

مساحة = π نق²

= π (٠,٩٥)²

= ٩٠٢٥ π

٣) دائرة محيطها ١٢π سم قُصّت بدقَّة من صفيحة معدنية مُربَّعة الشكل، كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور:



أ) ما طول ضلع المُربَّع؟

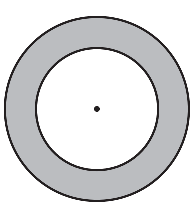
ب) ما مساحة الصفيحة المعدنيَّة المُتبقِّية بعد قصّ الدائرة؟ أوجد الناتج بدلالة π.

م = π نق²

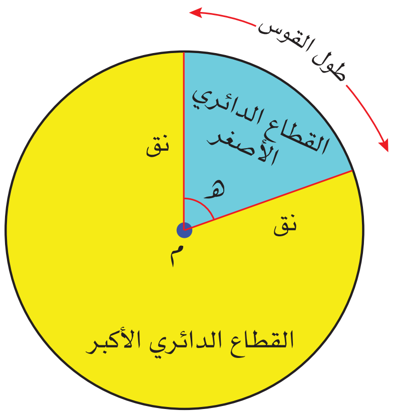
م = π (٣)²

م = ٩ π

٤) يُبيّن الشكل المجاور دائرتَين لهما نفس المركز، مُحيط الدائرة الداخلية ١٤π مم، ونصف قطر الدائرة الخارجية ٩ مم. أوجد الإجابة الدقيقة لمساحة المنطقة المُظلَّلة.



١٦-٢-د القوس والقطاع الدائري



يُبيِّن الشكل المُجاوِر دائرة مع نصفَي قطر رُسما من المركز. تُعرف المنطقة المحصورة بين نصفَي القُطرَين والقوس بينهما **بالقطاع الدائري**. لاحظ وجود قطاعَين دائريَين أحدهما أكبر من الآخر.

يُسمّى الجُزء من المُحيط **بالقوس الدائري**.

الزاوية المركزية هـ تُقابِل قوس القطاع الدائري.

لاحظ أن القطاع الدائري الأصغر كسر من الدائرة الكاملة ويُساوي $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من الدائرة.

بما أن مساحة الدائرة π نق² ومساحة القطاع الدائري $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من مساحة الدائرة، فإن

$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{هـ}{٣٦٠°} \times \pi \times \text{نق}^2}$$

إذا كان القطاع الدائري يساوي $\frac{هـ}{٣٦٠°}$ من الدائرة، يُحسب طول قوس القطاع الدائري من مُحيط الدائرة (٢ × π × نق). على النحو التالي:

محيط الدائرة

$$\boxed{\text{طول القوس} = \frac{هـ}{٣٦٠°} \times ٢ \times \pi \times \text{نق}}$$

تأكّد أنّك تتذكّر الحالتَين الخاصّتَين التاليتَين:

- إذا كانت قيمة هـ = ٩٠°، يكون لديك **ربع دائرة**.
- إذا كانت قيمة هـ = ١٨٠°، يكون لديك **نصف دائرة**.

نق = ٥

نق = ١٠

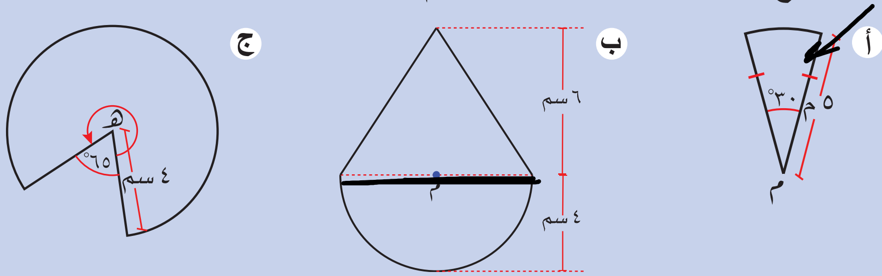
* أحسب مساحة القطاع الدائري، وطول القوس.

* م. ق. د = $\frac{٩٠}{٣٦٠} \times \pi \times (٥)^2$

* طول القوس = $\frac{٩٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \pi \times ٥$

مثــال ١٠

أوجد مساحة ومُحيط الشكلَين (أ)، (ج)، ومساحة الشكل (ب).
أعطِ الناتج مُقرباً إلى عدد مُكوَّن من ٣ أرقام معنوية.



الحــلّ:

أ

المساحة = $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times \pi \times$ نق^{٢}

= $\frac{٣٠°}{٣٦٠°} \times \pi \times ٥^{٢}$

= ٦,٥٤٤...

= ٦,٥٤ م^{٢}

المطلوب كسر من مساحة الدائرة الكاملة. لذا اضرب مساحة الدائرة في $\frac{٣٠°}{٣٦٠°}$

المُحيط = $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times ٢\pi$ نق + ٢ نق

= $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠°} \times ٢\pi \times ٥ + ٢ \times ٥$

= ١٢,٦١٧...

= ١٢,٦ م

محيط الشكل =
طول القوس + ٢ × طول نصف القطر

ب

المساحة = مساحة المُثلَّث + $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة.

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ق ع + $\frac{١}{٢}$ π نق^{٢}

= $\frac{١}{٢} \times ٨ \times ٦ + \frac{١}{٢} \times \pi \times ٤^{٢}$

= ٤٩,١٣٢...

= ٤٩,١ سم^{٢}

لتجد مساحة نصف الدائرة، اقسم مساحة الدائرة على ٢

اكتب مساحتَي الشكلَين.

عوّض.

الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية.

لاحظ أنك تحتاج إلى إضافة ٥ م مرَّتَين للمُحيط، إذ تلزمك إضافة طولَي الحافتَين المستقيمتَين.

لاحقًا

ستتمكّن من إيجاد مُحيط الشكل الثاني بعد دراسة نظرية فيثاغورث في الصف العاشر.

لاحظ أن قاعدة المُثلَّث هي قطر الدائرة.

لاحظ أن قياس الزاوية هـ غير مُعطى. يجب إيجاده باستخدام هـ = ٣٦٠° – ٦٥°

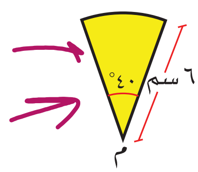
لا بد أنك لاحظت عدم وجود معلومات كافية لتجد مُحيط الجزء العلوي من الشكل بمعرفة القوانين التي درستها حتى الآن.

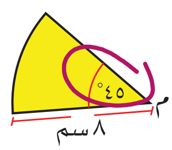
ج المساحة = $\frac{360^\circ - 65^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 4^2$	اكتب صيغة المساحة.
$= \frac{295^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 16$	عوّض.
$= 41.189...$	
$= 41.2$ سم^2	الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية
المُحيط = $\frac{هـ}{360^\circ} \times 2\pi$ نق + ٢ نق	اكتب صيغة المحيط.
$= \frac{295^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 4 + 2 \times 4$	عوِّض.
$= 28.594...$	
$= 28.6$ سم	الناتج مُقرَّبًا الى ثلاثة أرقام معنوية.

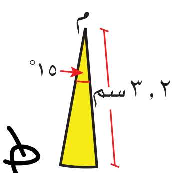
تمارين ١٦-٢-د

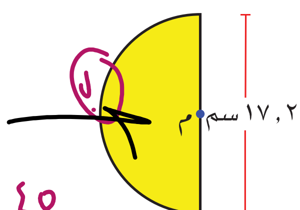
١) أوجد مساحة ومُحيط كلّ شكل من الأشكال التالية:

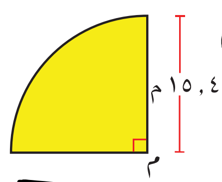
لتجد المُحيط، تحتاج إلى إيجاد طول القوس، لذا احسبه بصورة مُستقلّة.

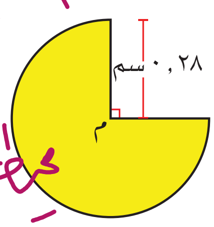
أ


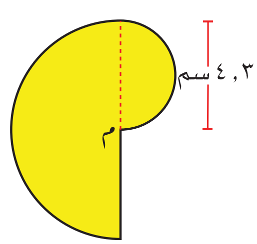
ب


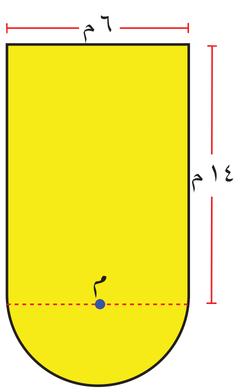
ج


د


هـ


و


ز


ح


ط = $\frac{٤٥}{٣٦٠} \times ٢\pi \times ٢،٠$

مساحة = $\frac{٤٠}{٣٦٠} \times \pi \times (٦)^٢$

م = $\frac{٤٥}{٣٦٠} \times \pi \times (٨)^٢$

محيط = $\frac{٤٥}{٣٦٠} \times ٢\pi \times ٨$

طول القوس = $\frac{٤٠}{٣٦٠} \times ٢\pi \times ٦$

$= \frac{٤}{٣}\pi$