محدد المصفوفة من الرتبة ٢×٢

لكل مصفوفة محدد

فائدة تحديد إذا كان المصفوفة محكوس أم لا.

حساب المحدد: $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$

رمز المحدد $= \Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{vmatrix} = أ \times د - ب \times ج$

(علية ناتج الضرب)

إذا كان $\Delta = 0$ ⇐ مصفوفة منفردة

$\Delta \neq 0$ ⇐ مصفوفة غير منفردة

$\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ = أ

محدد $\Delta = ٢ \times ٣ - ١ \times ٠$

Δ = ٦ = عدد ≠ ٠ ⇐ غير منفردة

تمارين ٧-٤

١) أوجِد محدد كل من المصفوفات الآتية:

وحدد ما إذا كانت المصفوفة منفردة أم غير منفردة:

أ) $ل = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$

ب) $ن = \begin{pmatrix} ٧ & ٢- \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

ج) $س = \begin{pmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤ & ٧- \end{pmatrix}$

د) $ز = \begin{pmatrix} ١٢- & ٨ \\ ٧- & ٥ \end{pmatrix}$

هـ) $ت = \begin{pmatrix} ٩- & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$

و) $ى = \begin{pmatrix} ١٢- & ٩- \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

ز) $س = \begin{pmatrix} ٢,٥ & ١,٨ \\ ٤,٢- & ٣,٦- \end{pmatrix}$

ح) $و = \begin{pmatrix} ٤ & ٠,٢- \\ ١٥- & ٠,٧٥ \end{pmatrix}$

٢) م مصفوفة محايدة من الرتبة ٢ × ٢، ك عدد قياسي، أوجد محدد ك م

٣) أ) $أ = \begin{pmatrix} ٦ & أ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$، $\Delta أ = ٤$، أوجِد قيمة أ.

ب) أوجِد قيمة ب إذا كانت $ب = ٢ \begin{pmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ب \end{pmatrix}$، $|ب| = ٥٤$

ج) أوجِد قيمة جـ إذا كانت $ج = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ٥ & \frac{١}{٢} جـ \\ ٤ & ٦- \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة.

د) إذا كانت $ك = \begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة، أوجِد قيمة د.

هـ) لدينا $هـ = \begin{pmatrix} س & ص \\ ٤- & ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣- & ٤ \end{pmatrix}$، هـ مصفوفة منفردة، اكتب ص بدلالة س.

ج $\underline{س} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

محدد ، نحدد منفردة أم لا.

$\Delta = (5 \times 4) - (-7 \times -3)$

$= 20 - 21 = -1$

$\Delta \neq 0$ ← غير منفردة

و $\underline{ي} = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

$\Delta ي = (-12 \times 6) - (-9 \times 8)$

$= -72 - (-72) = 0$

$= 0$

منفردة

ج) $\underline{ع} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta = (1 \times 1) - (0 \times 0) = 1 - 0 = 1$

$\neq 0$

ج أوجِد قيمة جـ إذا كانت $\underline{ع} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2}جـ \\ 6- & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة.

$\underline{ع} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2}جـ \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة

$\Delta = (5 \times 4) - (-6 \times \frac{1}{2}جـ) = 0$

$20 - (-3جـ) = 0$

$20 + 3جـ = 0$

$3جـ = -20$

$جـ = -\frac{20}{3}$

د إذا كانت $\underline{ك} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ د & 4 \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة، أوجِد قيمة د.

$\Delta = 0$ ← منفردة

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ د & 4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 \times -3 + 0 \times د & 3 \times 2 + 0 \times 4 \\ 3 \times -3 + 0 \times د & 3 \times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$

$\Delta = (-9 \times 12) - (6 \times -9) = 0$

$-108 + 9د = 0$

$9د = 108$

$د = \frac{108}{9} = 12$

$\frac{12}{2} = 6$

$د = 6$

★ معكوس المصفوفة:

- عندما تكون المصفوفة غير مفردة إذا يوجد لها **معكوس**

$\Delta \neq 0 \leftarrow$ يوجد معكوس

$\Delta = 0 \leftarrow$ لا يوجد معكوس

- يكتب معكوس المصفوفة A على الصورة A^{-1}

- **ملاحظة ٥**: عند ضرب $A \times A^{-1} = I$ (المصفوفة المحايدة) ← مصفوفة

★ طرق إيجاد معكوس المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

١) أولا إيجاد المحدد $\Delta \neq 0$

$\Delta = (2)(-3) - (1)(-4) = -6 + 4 = -1$

٢) تبديل العناصر في القطر الرئيسي

٣) تغيير إشارة العناصر في القطر الثانوي

٤) ضرب الناتج في العدد القياسي $\frac{1}{|A|}$ ← محدد

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ} = \begin{pmatrix} \underline{ب} & \underline{ه} \\ \underline{د} & \underline{ج} \end{pmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{\underline{أ}\,\underline{ه} - \underline{ب}\,\underline{ج}} \begin{pmatrix} \underline{د} & -\underline{ب} \\ -\underline{ج} & \underline{أ} \end{pmatrix}$$

تمارين ٧-٥

١) أوجِد معكوس كل من المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ $\underline{ى} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

ب $\underline{س} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٩ & -٥ \end{pmatrix}$

ج $\underline{و} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}$

د $\underline{س} = \begin{pmatrix} -٦ & -١٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

هـ $\underline{ص} = \begin{pmatrix} -١٨ & -١١ \\ -١٢ & -١٤ \end{pmatrix}$

و $\underline{غ} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١٩ \\ -٦ & -١١ \end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن المصفوفتَين $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$.

أ أوجِد $\underline{أ}^{-١}$

ب أوجِد $\underline{ب}^{-١}$

٣) إذا علمت أن المصفوفتَين $\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$، $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

أ أوجد المصفوفة $\underline{ل} - \underline{ن}$

ب أوجد معكوس المصفوفة $\underline{ل} - \underline{ن}$

ج بيّن أن المصفوفة $\underline{ل} + \underline{ن}$ ليس لها معكوس.

ج $\underline{و} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٧ & -٤ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٠$

$\Delta_{\underline{و}} = ١ \times -٤ - ٧ \times ٠$

$= -٤ - ٠$

$= -٤$

قانون معكوس