الصف العاشر

الوحدة الثانية عشرة:

الاحتمالات ومخطط الشجرة ومخطط فن

أ/مازن الشرقي مادة الرياضيات للتواصل: ٩٩٤١٠٠١٣

(١٢-١) استخدام مخطط الشجرة لتمثيل النواتج الممكنة للحدث

التعلم القبلي:

١) تذكر أن:

إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين فإن:	إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن:
ل(أ و ب)= ل(أ) × ل(ب)	ل(أ أو ب)= ل(أ)+ ل(ب)

- الفضاء العيني لحدث ما: هو جميع النواتج الممكنة للحدث
- عنـــدما يكون للحـــدث مرحلتان أو أكثر يسمـى حدثا مركبا.

٢) عـــند رمي قطعة نقد معـــدنية وحجـــر نـــرد منتظـــم ذو ستـــة أوجـــه تم تسجيل النواتج باستخدام الحرف (ص) للدالة على الصورة والحرف (ك) للدالة على الكتابة:

أ) **أكمل** مخطط الفضاء الاحتمالي التالي:

		حجـــــــر نـــــرد					
قطعة نقد		١	٢	٣	٤	٥	٦
	ص						
	ك						

ب) مستعينا بالمخطط السابق: أكمل الجدول التالي:

عدد النواتج الممكنة في التجربة	
عدد النواتج الممكنة التي يكون فيها عدد زوجي وصورة	
عدد النواتج الممكنة التي يكون فيها عدد أولي وصورة	
احتمـــال الحصـــول علـــى عـــدد أولـــي و كتابة	
احتمال الحصول على عدد أقل من أربعة وصورة	
احتمـــال ظهـــور الـــرقـــم (١ أو ٢) و صـــورة	

يمكن عرض النواتج الممكنة لأحداث مركبة بطرق مختلفة منها:

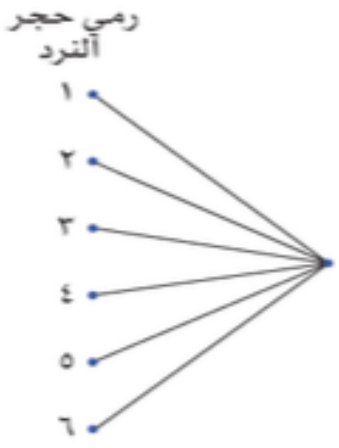
- مخطط الفضاء الاحتمالي (سبق دراسته)
- مخطط الشجرة
- مخطط فن

تعريف:

- مخطط الشجرة هو مخطط يتضمن فروعاً تمثل جميع النواتج الممكنة (فضاء العينة) لحدث ما أو أكثر.
- كل قطعة أو فرع في الشجرة تمثل ناتجاً من نواتج الحدث تسمى كل فرع باسم الناتج.

خطوات رسم مخطط الشجرة:

- عين نقطة لتمثّل الحدث الأول.
- ارسم فروعًا من النقطة لتبيّن جميع النواتج الممكنة للحدث الأول فقط.
- اكتب النواتج عند نهاية كل فرع.
- ارسم نقطة ثانية عند نهاية كل فرع لتمثّل الحدث التالي.
- ارسم فروعًا عند كل نقطة لتبيّن جميع النواتج الممكنة للحدث الجديد.
- اكتب النواتج عند نهاية الفروع.



مثال: رقم (١) كتاب الطالب صفحة ٩٩

وضعت سميرة في حقيبتها ثلاث بطـــاقات ملوّنـــة: حمراء، وزرقاء، وخضراء.

أ) ارسم مخطّط شجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة سحب بطاقة واحدة من الحقيبة عشـــوائيًا، ثـــم إعادتها إلى الحقيبة، ومـــن ثم سحب بطاقة أخرى من الحقيبة عشوائيًا.

ب) ضع دائرة حول عدد النواتج الممكنة في التجربة

٩ ٦ ٣ ٢

ج) **أكمل:**

- عدد النواتج الممكنة التي يكون فيها للبطاقتين نفس اللون =_____
- عـــدد النواتـــج التي تتضمـــن بطاقـــة زرقـــاء واحـــدة = _____
- عـــدد النـــواتـج التي لا تتضـــمن بطـــاقـــة زرقـــاء= _____

د)

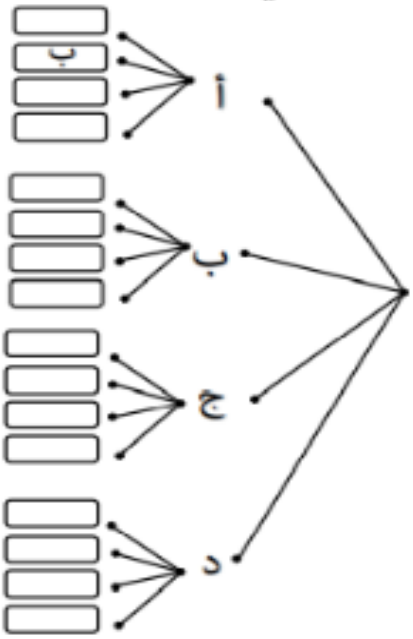
تقـــول رؤى: أن عـــدد النواتج الـــتي تتضمن بطاقة زرقاء واحدة على الأقل =٤

وضح أن إجابة رؤى خاطئة.

نشاط جماعي:

وُضعت أربع بطاقات كُتبت عليها الأحرف: أ، ب، ج، د في وعـاء، سُحـبت بطاقة واحدة، وتمّ تسجيل الحرف، ثم أُعيدت البطاقة إلى الوعاء. وسُحبت بطاقة أخرى وتم تسجيل الحرف أيضًا للحصـول على نواتـج من حرفَين.

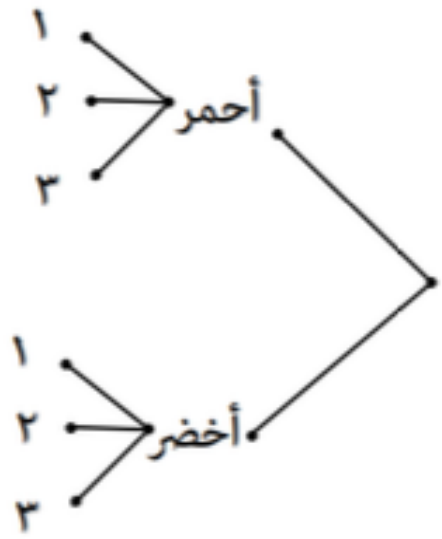
أ) أكمل مخطط الشجرة الذي يعرض الفضاء العيني لهذه التجربة.



ب) ضع علامة √ في المكان المناسب:

	صح	خطأ
عـدد النواتج في التجربـة =١٦	☐	☐
عدد النواتج التي تتضمن حرف ب في السحب الثاني = ٣	☐	☐
عدد النواتج التي تتضمن حرفين في متشابهين = ٨	☐	☐

نشاط فردي: رسمت منى مخطط الشجرة لتجربتها لسحب كرة ملونة ثم سحب بطاقة مرقمة كالتالي:



أكمل :

١) نواتج التجربة الأولى هي _____

٢) نواتج التجربة الثانية هي _____

الواجب المنزلي: أرسم مخطط الشجرة لتعرض جميع النواتج الممكنة عند لـــرمي حجري نرد منتظمـــين لكـــل منهـــما ٦ أوجـــه

(١٢-٢) حساب الاحتمال في مخطط الشجرة

التعلم القبلي:

١) تذكر:

- قيمة الاحتمال تقع بين صفر ، ١ أو تساويهما (٠ ≤ ل(ح) ≤ ١)

٢) سؤال:

- رميت قطعة نقد معدنية منتظمة ثلاث مرات أرسم مخطط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة.

حساب الاحتمال في مخطط الشجرة :

- تمثل كل قطعة مستقيمة أو فرع في الشجـــرة ناتجا من نواتج الحدث
- تسمى نهاية كل فرع باسم الناتج
- يكتب احتمال كل ناتــج على الفــرع على صـــورة كسر أو عـدد عشري
- من المفيد إضافة عمود التراتيب(النواتج) الممكنة عند نهاية كل الفروع

حساب الأحداث المركبة في مخطط الشجرة

أنتبه: و تعني اضرب الاحتمالات
أو تعني أجمع الاحتمالات

لتجد احتمال أحد الأحداث المفضلة:

١)أضرب عندما تنتقل عبر فروع الشجرة (فروع متتالية).
٢)أجمع عندما تنتقل إلى أسفل الفروع.

ملاحظة مهمة:

مجموع كل الاحتمالات في كل مجموعة من الفروع يساوي واحد.

مثال: رقم (١) كتاب الطالب صفحة ١٠٣

تحتوي حقيبة على ثماني كرات بلون أزرق، وكرتَين بلون أحمر. تم سحب كرتَين عشوائيًا. أُعيدت الكرة الأولى قبل سحب الكرة الثانية.

١) أرسم مخطط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة مع كتابة احتمال كل حدث.

٢) كم عدد النواتج الممكنة؟ _____

٣) ضع علامة √ في المكان المناسب مع التبرير:

	صح	خطأ
احتمال الحصول على كرتين باللون الأحمر = $\frac{١}{٢٥}$	☐	☐
احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء وكرة زرقاء= $\frac{٤}{٢٥}$	☐	☐
احتمال الحصول على كرة حمراء على الأقل = $\frac{٩}{٢٥}$	☐	☐

٤) ضع دائرة حول احتمال الحصول على كرتين باللون الأزرق

$\frac{١٦}{٢٥}$ $\frac{٤}{٢٥}$ $\frac{١}{٥}$ $\frac{٨}{٢٥}$

نشاط فردي(١): رقم (١) كتاب الطالب صفحة ١٠٣

رُميت قطعـــة نقود معدنيـــة منتظمـــة مرّتَـــين

١) أرسم مخطط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة مع كتابة احتمال كل حدث.

٢)

وضح أن إجابة محمد صحيحة.

نشاط فردي (٢) : رقم (٤) كتاب الطالب صفحة ١١٨

احتمال ظهور صورة عند رمي قطعة نقود معدنية $\frac{٢}{٥}$، تم رمي القطعة مرّتين

١) أرسم مخطط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة مع كتابة احتمال كل حدث.

٣) إذا كـــان احتمـــال أن يكون ناتــج الرميتين مختلفـــا= س - ٢
ضع دائرة حول قيمة س

$\frac{١٢}{٢٥}$ $\frac{١٤}{٢٥}$ $\frac{٦٢}{٢٥}$ $\frac{٣٨}{٢٥}$

٤) **أكمل:** احتمال الحصول على:

- صورتين = _____
- كتابتين = _____
- كتابـــة واحدة على الأقل =_____
- كتابـــة واحدة فقط = _____
- كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية =_____

نشاط جماعي:

مع سعاد قلم أحمر وقلم أزرق، ومع سميرة قلم أحمر وقلم أزرق، ومع مريم قلم أحمر وقلم أسود. اختارت المعلمة قلمًا واحدًا من كل طالبة عشوائيًا.

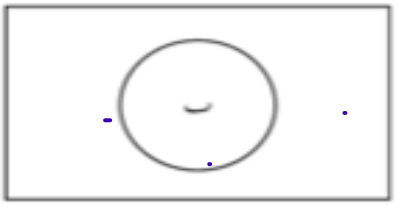
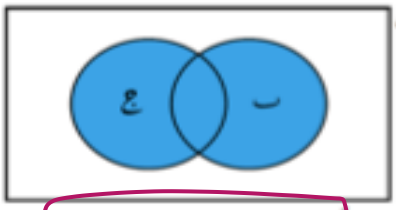
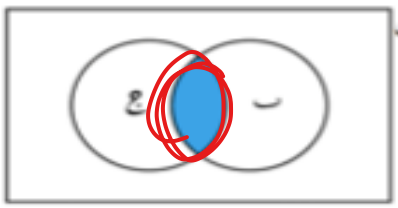
١) أرسم مخطط الشجرة لتعرض كل النواتج الممكنة مع كتابة احتمال كل حدث.

٢) ضع علامة(٧) في المكان المناسب مع التبرير
احتمال أن تكون الأقلام الثلاثة المختارة:

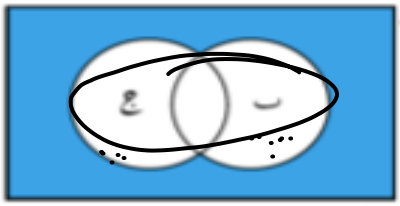
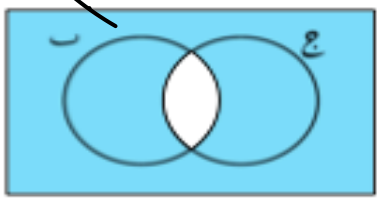
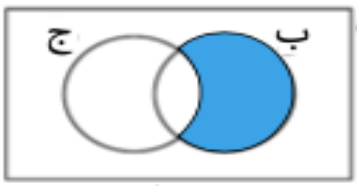
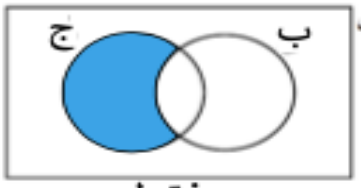
	صح	خطأ	التبرير
كلها حمراء = $\frac{١}{٨}$	☐	☐	☐
تتضمن قلما واحد أحمر فقط = $\frac{٣}{٨}$	☐	☐	☐
كلها زرقاء = $\frac{٣}{٨}$	☐	☐	☐
تتضمن قلما واحد أزرق فقط= $\frac{١}{٤}$	☐	☐	☐

(١٢-٣) حساب الاحتمال من مخطط فن

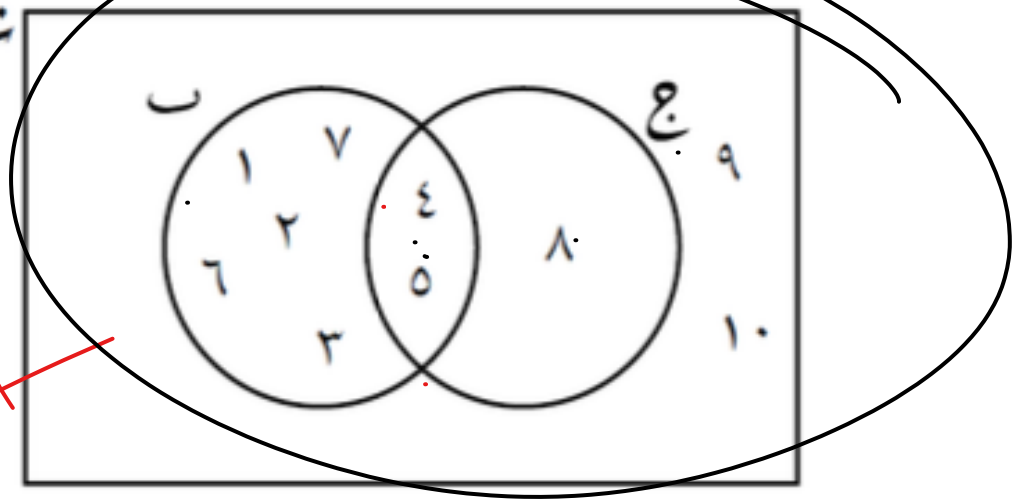
التعلم القبلي: تذكر أن مخطط فـن هو أسلوب تصـــويري لعرض المجموعات

التعريف	الشكل
المجموعة الشاملة تمثل بمستطيل ويرمز لها بالرمز ش	
أي مجمـوعة هي مجمـوعة جـزئية مـن المجمـوعة الشاملة ش ع(ب) يرمز لعـدد عناصر المجموعـة ب الأعداد في مخطط فن يمكن أن تمثل عناصر المجموعة أو عدد العناصر	
اتحاد المجموعتين ب، ج هي مجموعة كل العناصر الموجودة في المجموعتين بـدون تكرار ويرمز لها بالرمز (ب ∪ ج) (العنـاصـر الـتي تقـع في ب أو ج)	 (ب ∪ ج)
تقاطع المجموعتين أ ، ب هي مجموعـة العـناصر المشتركـة بيـن المجموعتـين ويـرمـز لهـا بالرمز (ب ∩ ج) (العناصـر التي تقـع في ب و ج معا)	 (ب ∩ ج)

ب َ

التعريف	الشكل
المجموعة المتممة للمجموعة ب هي المجموعة التي تحتوي على كل العناصر التي تقع في ش ولا تقـع في ب. كلمـات تدل على المتممـة (لا يوجد / ليس)	 ب/
العناصر التي لا تقع في أي من المجموعتين	 (ب ∪ ج)/
متمـمة التقاطـع	 (ب ∩ ج)/
يفضل ب ولا يفضل ج	 ب فقط
يفضل ج ولا يفضل ب	 ج فقط

مثال: مستعينا بالشكل المقابل أكمل الجدول التالي:



عناصر ش	{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}
عناصر المجموعة ج	{٤، ٥، ٨}
ع (ج)	٢
عناصر المجموعة ب	{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}
ع(ب)	٧
ب ∪ ج	{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}
ع (ج ∪ ب)	٨
ب ∩ ج	{٤، ٥}
ع (ج ∩ ب)	٢
ج′	{١، ٢، ٣، ٦، ٧، ٩، ١٠}

حساب الاحتمال من مخطط فن :

يفيد مخطط فن عند التعامل مع مسائل الاحتمال وبخاصة عندما تتضمن المعلومات تقاطع الأحداث وتقاطعها.

ملاحظات هامة:

١) في الاحتمال تسمى المجموعة الشاملة بالفضاء العيني

٢) ل(أ) تعني احتمال أن يكون العنصر في المجموعة أ

٣) $ل(أ) = \frac{ع(أ)}{ع(ش)}$

٤) احتمال وقوع الحدثين ا و ب (ترمز لاحتمال وقوع العنصر في تقاطع المجموعتين) ويرمز له بالرمز:

$$ل(أ \text{ و } ب) = ل(أ \cap ب) = \frac{ع(أ \cap ب)}{ع(ش)}$$

٥) احتمال وقوع الحدثين ا أو ب (ترمز لاحتمال وقوع العنصر في اتحاد المجموعتين) ويرمز له بالرمز:

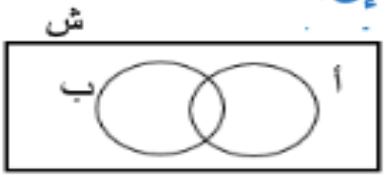
$$ل(أ \text{ أو } ب) = ل(أ \cup ب) = \frac{ع(أ \cup ب)}{ع(ش)}$$

قوانين هامة:

١) ل (أ ∪ ب)′ = ١ - ل (أ ∪ ب)

٢) ل (أ ∩ ب)′ = ١ - ل (أ ∩ ب)

٣) إذا كان أ ، ب أحداث ليست منفصلة (متباعدة) فإن:



ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب)

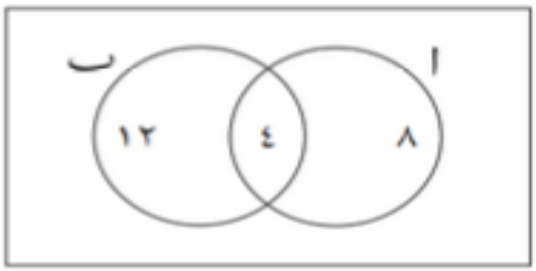
٤) إذا كان أ ، ب أحداث منفصلة (متباعدة) فإن:

ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

مثال-١ : رقم(١) كتاب الطالب صفحة ١٠٧

استخدم مخطط فن المقابل للإجابة عن الأسئلة التالية علما بأن الأعداد المذكورة داخل المخطط تمثل عدد العناصر.



١) ضع دائرة حول قيمة ل(أ)

$\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٢}$ $\frac{٢}{٣}$ $\frac{١}{٦}$

تابع مثال -١: رقم (١) كتاب الطالب صفحة ١٠٧

٢) صل بين الاحتمال من العمود الأول وقيمته من العمود الثاني:

ل (ب)	$\frac{١}{٦}$
ل (أ و ب)	$\frac{١}{٢}$
ل (ليس أ)	$\frac{٢}{٣}$
ل (أ أو ب)	$\frac{٥}{٦}$
ل (ليس أ أو ب)	صفر
ل (ليس أ و ب)	١

مثال-٢:رقم(٢) كتاب الطالب صفحة١٠٧

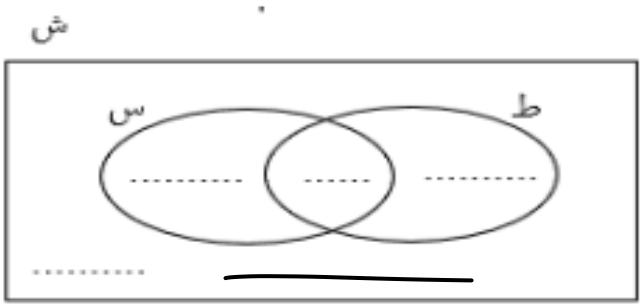
يبيع تاجر ٢٠ قميصا ، ستة قمصان منها بأكمام طويلة ، وأربعة قمصان منها سوداء اللون، واحد فقط من القمصان ذات الأكمام الطويلة أسود اللون .

١)ارسم مخطط فن لعرض المعلومات

نشاط ثنائي: رقم(٥) كتاب الطالب صفحة ٢٠٧

تبين دراسة مسحية أجريت على ١٣٠ طالبا أن هواية ٥٦ منهم الكرة الطائرة ،و٦٤ منهم كرة الســـــلة ، و٢٧ منهم اللعبـتان.

١) اكمل مخطط فن



٢) ظلل الاحتمال المناسب لكل عبارة

احتمال اختيار طالب عشوائيا	$\frac{٣٧}{١٣٠}$	$\frac{٣٢}{٦٥}$	$\frac{٢٧}{١٣٠}$	$\frac{٩٣}{١٣٠}$
هوايته كرة السلة	☐	☐	☐	☐
هوايته كرة القدم أو كرة السلة	☐	☐	☐	☐
هوايته اللعبتان	☐	☐	☐	☐
ليست هوايته أيا من اللعبـتان	☐	☐	☐	☐

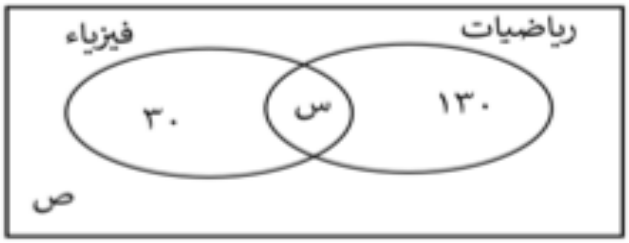
نشاط جماعي :

إذا كان أ، ب حدثين غير منفصلين وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل(ب)=٠,٧ ، ل(أ و ب) = ٠,٦ ، وضح أن:

١) احتمال عدم وقوع أ و ب معا = ٠,٤

٢) احتـــمال وقـــوع (أ أو ب) = ٠,٩

نشاط اثرائي: يبين مخطط فن المجاور بيانات عن المواد التي درسها ٢٥٠ طالبا في مدرسة دولية إذا كان اختيار طالب ممن يدرسون الرياضيات=٠,٨٤



أكمل :

أ)قيمة س =.....

ب)قيمة ص=.....

ج)كم طالب لم يدرس الرياضيات أو الفـيزياء.....

د)ما احتـــــمال اختـــيار طالب عشوائيا

هـ)يكون ممن يدرسون الرياضيات أو الفـــيزياء .....

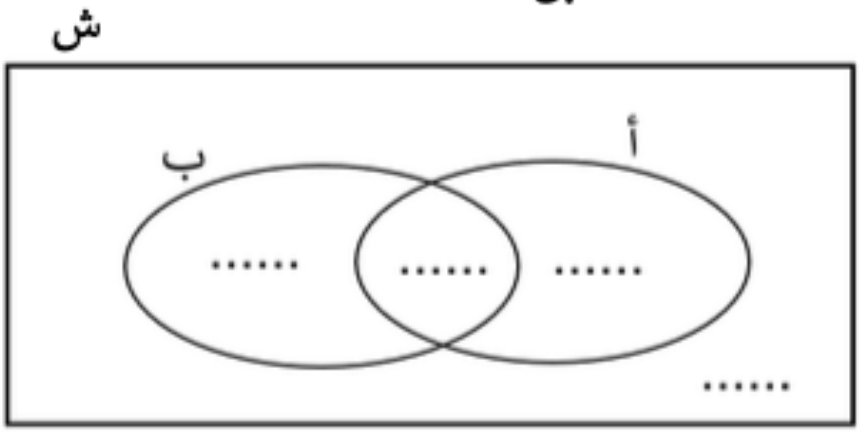
و) يكون ممن يدرسون الرياضيات و الفيزياء .....

نشاط تعزيزي:

تقـــع المجموعتـــــان أ ، ب في المجمـــــوعة الشـــاملة ش

ع(ش) = ٧٥ ، ع(أ) = ٣٠ ، ع (ب) = ٣٥ ، ع (أ ∩ ب) = ١٨

١) ضع البيانات السابقة في المخطط المقابل



٢) أوجد:

أ) ل (ب) =

ب) ل(أ و ب)=

ج)ل(أ أو ب)=

د)ل (أ) + ل (ب) - ل (أ و ب) =

٣)وضح أن الحدثان أ و ب غير متنافيان

الاحتمال الشرطي:

- الاحتمال الشرطي هو احتمال حدث يعتمد على احتمال حدث سابق له (أي احتمال وقوع حدث بشرط وقوع حدث آخر من قبل).
- يرمز لاحتمال وقوع الحدث ب بشرط أن الحدث أ قد وقع بالرمز ل (ب بشرط أن أ قد وقع) = ل (ب | أ).

طريقة حساب ل (ب | أ)

إذا كان الحدثين غير مستقلين

$$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$$

$$ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$$

$$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب|أ) \leftarrow$$

إذا كان الحدثين مستقلين

$$ل(ب|أ) = ل(ب)$$

ملاحظة:

- يمكن استخدام مخطط الشجرة أو مخطط فن لحل مسائل الاحتمال الشرطي.
- غالبا ما تتضمن أسئلة الاحتمال الشرطي تعليمات مثل دون إعادة أو الواحد تلو الاخر.
- يمكن تمييز الاحتمال الشرطي ل (أ | ب) في المسائل اللفظية من خلال بعض الدلالات.

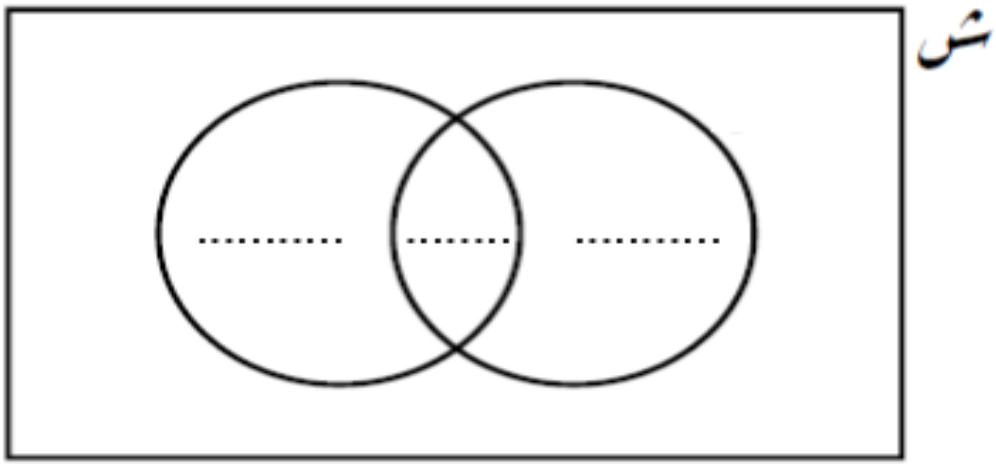
١) إذا وقع أ بشرط وقوع ب ٢) إذا كان أ فإن ب

٣) إذا علمت أن (أ) إذا كان (ب) ٤) وقوع (أ) علما بأن (ب) وقع

نشاط جماعي : رقم (٤) كتاب الطالب صفحة ١١٤

شارك ١٠٠ متدرّب في دورة تدريبية على الحاسوب. تدرّب ٨٠ منهم على الترميز في حين تدرّب ٤٢ منهم على تقنية الرسوم المتحرّكة. تدرّب كل واحد من المئة متدرب على نشاط من هذَين النشاطَين على الأقلّ.

١) أكمل مخطط فن لعرض المعلومات



٢) ضع دائرة حول احتمال أن يكون قد تدرب على تقنية الرسوم المتحركة بشرط أنه تدرب على الترميز

$\frac{١١}{٤٠}$ $\frac{١١}{٥٠}$ $\frac{١}{٥}$ $\frac{٥٨}{١٠٠}$

٣) ضع دائرة حول احتمال أن يكون قد تدرب على الترميز ولم يتدرب على تقنية الرسوم المتحركة

٠,٥٨ ٠,٢٢ ٠,٢٠ ٠,٤٤

نشاط إثرائي:

١) إذا كان أ ، ب حدثين غير مستقلين ، ل(أ)= ٠,٣ ، ل(ب)=٠,٤
ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ ضع دائرة حول ل(أ | ب)

$\frac{٤}{٥}$ $\frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٤}$

٢) إذا كان أ ، ب حدثين غير مستقلين وكان ل (أ ∩ ب) = ٠,٢٤ ، ل (أ | ب) = ٠,٣
ضع دائرة حول ل(ب)

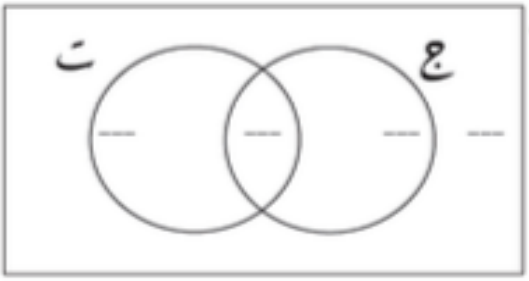
٠,٨ ٠,٧٢ ٠,٣ ٠,٠٧٢

٣) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب)= ٠,٥
ضع دائرة حول ل(أ|ب)

٠,١٥ ٠,٢ ٠,٣ ٠,٥

نشاط ختامي رقم (٨) كتاب الطالب صفحة ١١٨

في صفّ من ٤٠ طالبًا، يفضل ٢٠ منهم مادة الجغرافيا، و ٢٥ منهم مادة التاريخ، في حين أنّ ٨ منهم لا يفضّلون أيًّا من المادتين.



ش = {طلاب الصف العاشر في مدرسة ما}
ج= {الطلاب الذين يحبّون مادة الجغرافيا}
ت ={ لطلاب الذين يحبّون مادة التاريخ}

١) أكمل مخطّط فن لتبيّن عدد الطلاب في كلّ مجموعة.

٢) **أكمل:**

ع(ج)= ..... ، ع (ج ∪ ب)= .....

٣) صل بين كل عبارة وما يناسبها من العمود الثاني إذا تم اختيار طالب عشوائياً فإن احتمال أن يكون الطالب

يفضل مادة التاريخ ولا يفضل مادة الجغرافيا	$\frac{١٣}{٢٠}$
يفضل الجغرافيا ويفضل مادة التاريخ أيضا	$\frac{١٣}{٢٥}$
يفضل الجغرافيا بشرط أن يفضل مادة التاريخ	$\frac{١٣}{٤٠}$
يفضل التاريخ بشرط أن يفضل مادة الجغرافيا	$\frac{٣}{١٠}$

ملخص الحوادث

نوع الحوادث	الوصف	القانون
المتنافيان	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة	ل(أ ∩ ب) = صفر ل(أ أو ب) = ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)
غير متنافيان \غير المنفصلين	يوجد بينهما عناصر مشتركة	ل(أ أو ب)= ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب)
المتتامان	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة واتحادهما معا يمثل الفضاء العيني	ل(أ)+ ل(أ´)=١ ل(أ´) = ١- ل(أ)
المستقلان	وقوع أحدهما لا يؤثر على احتمال وقوع الآخر	ل(أ و ب) =ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) ل (أ | ب) = ل(أ) ل (ب | أ) = ل(ب)
غير المستقلين	وقوع أحدهما يؤثر على احتمال وقوع الآخر	ل (أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب| أ)
المشروطة	احتمال حدث يعتمد على احتمال حدث سابق له	ل(أ | ب)= ل (أ ∩ ب) ، ل(ب)≠٠ ل(ب)