الصف الثاني عشر (أساسي)

الوحدة السادسة:

التوزيع الطبيعي

المحتويات

(رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي
وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِّن لِّسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي)

الوحدة السادسة
التوزيع الطبيعي
The normal distribution

ستتعلَّم في هذه الوحدة كيف:

٦–١ تعرف خصائص المتغير العشوائي المتصل، وتستخدم التوزيع الطبيعي لتمثيل المتغير العشوائي المتصل حيث يكون ذلك مناسبًا.

٦–٢ تتذكر وتستخدم خصائص التوزيع الطبيعي.

٦–٣ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما ز ~ ط (٠، ١) لإيجاد:

- قيمة ل(ز < ز١) أو قيمة احتمال متعلقة بها.
- قيمة ز١ إذا كانت قيمة ل(ز < ز١) معطاة أو قيمة احتمال متعلقة بها.

٦–٤ تحوّل إلى الصيغة المعيارية وتستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما س ~ ط (و، ع٢) لإيجاد:
قيمة ل(س < س١) أو قيمة احتمال متعلق بذلك إذا كانت القيم س١، و، ع معطاة بما في ذلك المتعلق بمسائل واقعية.

٦–٥ تحوّل إلى الصيغة المعيارية وتستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري عندما س ~ ط (و، ع٢) لإيجاد:
قيم س١، و، ع إذا كانت قيمة ل(س < س١) أو قيمة احتمال متعلق بذلك معطاة بما في ذلك المسائل الواقعية.

٦-١ المتغيرات العشوائية المتصلة والمنحنى الطبيعي

المتغير العشوائي المتصل

نقول عن متغير أنه متغير عشوائي متصل **continuous random variable** إذا أمكن أن يتخذ عددًا غير قابل للعد من القيم في فترة ما (أي قيمة في مجال محدد)، وإن كانت هذه القيم نواتج عددية لحوادث أو ظواهر عشوائية.

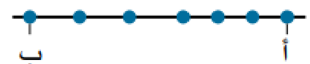
طول ولد عمره ١٧ عامًا مثال على متغير عشوائي متصل، فمن غير الممكن قياس طول أي ولد بعمر ١٧ عامًا بشكل دقيق، ولكن يمكن إعطاء الأطوال مقربةً إلى أقرب سنتيمتر مثلًا. في هذه الحالة، الطول ١٦٣ سم يعني أن الطول الفعلي هو في الفترة ١٦٢,٥ ⩽ الطول < ١٦٣,٥ سم.

بشكل مماثل، كتلة طفل حديث الولادة هي متغير عشوائي متصل؛ فإذا كانت الكتلة المعطاة ٣,٢ كغم فهذا يعني أن الكتلة الفعلية هي في الفترة ٣,١٥ ⩽ الكتلة < ٣,٢٥ كغم.

لا يمكن إعطاء قيم المتغير العشوائي المتقطع، مثل العدد المحتمل للركاب في الحافلة، إلا لأقرب عدد صحيح. إذا كان هناك ١٢ راكبًا، فلا يمكن إعطاء ذلك بدقة أكبر.

يوضح المخطط الآتي القيم المحتملة للمتغير العشوائي المتقطع في الفترة من أ إلى ب:

المتغير العشوائي المتقطع



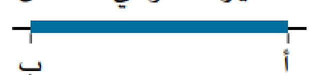
لإظهار التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع، نقوم بإدراج جميع قيمه المحتملة والاحتمالات المقابلة لها في جدول أو في مخطط مثل مخطط الأعمدة.

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا، فيمكننا تمثيل ل(س)

يمكن دائمًا إعطاء قيم المتغير العشوائي المتصل بدرجة أكبر من الدقة. الارتفاع المعطى بمقدار ١,٣٨ متر دقيق لمنزلتين عشريتين فقط. وسوف تصبح هذه القيمة أكثر دقة إذا تم إعطاؤها إلى ٣، ٤، ٥، أو ٦ منازل عشرية، وهكذا.

ويوضح المخطط الآتي القيم المحتملة للمتغير العشوائي المتصل في الفترة من أ إلى ب:

المتغير العشوائي المتصل



لتوضيح التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل، لا يمكننا إدراج جميع قيمه المحتملة، ولكن يمكننا إظهار المجال الكامل لقيمه واحتمالات الفترات ضمن هذا المجال في جدول أو مدرج تكراري.

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فيمكننا تمثيل ل (أ < س ≤ ب) أو ل(أ ≤ س < ب) وهكذا.

المنحنى الطبيعي

يمكن تمثيل بيانات المتغيرات العشوائية المتصلة في مدرج تكراري، حيث تساوي أطوال الأعمدة الكثافات التكرارية وتتناسب مساحات الأعمدة مع التكرارات.

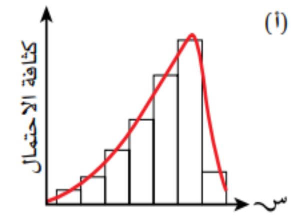
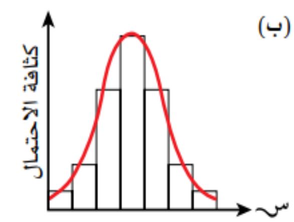
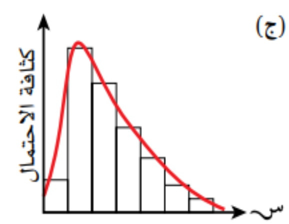
في المدرج التكراري، المساحة الكلية للأعمدة تساوي التكرار الكلي للبيانات.

لتمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل، يرسم التمثيل البياني لمنحنى مبني على شكل المدرج التكراري.

يسمى المنحنى **دالة كثافة الاحتمال** **probability density function (PDF)**.

عندما يرسم منحنى دالة كثافة الاحتمال على المدرج التكراري، تتحوّل كثافة التكرار إلى كثافة الاحتمال، بحيث تصبح المساحة الكلية تحت المنحنى مساوية لمجموع الاحتمالات وهو ١

رسمت منحنيات دوال كثافة الاحتمال أعلى كل من المدرجات التكرارية في المخططات أدناه:

المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال = ١	
(أ)  التواء سالب (الامتداد الأطول إلى اليسار)	يُعدّ التوزيع في (أ) التواء سالبًا لأن وسط المتغير (س) يقع إلى يسار قمة المنحنى.
(ب)  معتدل	التوزيع في (ب) معتدل (متناظر). يتساوى ويقع كل من الوسط والمنوال والوسيط عند قمة المنحنى.
(ج)  التواء موجب (الامتداد الأطول إلى اليمين)	يُعدّ التوزيع في (ج) التواء موجبًا لأن وسط المتغير (س) يقع إلى يمين قمة المنحنى.

مُساعَدة

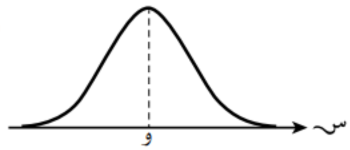
يقع المنوال عند قمة المنحنى (أعلى نقطة فيه)، ويقع الوسيط عند القيمة حيث تكون المساحة تحت المنحنى منقسمة إلى جزأين متساويَين.

المنحنى الذي يمثل التوزيع الاحتمالي في (ب) منحنى طبيعي **normal curve**، وهو متناظر وله شكل الجرس. يتفق هذا مع الوصف السابق وهو أن القيم القريبة من الوسط هي أعلى احتمالًا (وتشير إلى ذلك القيم العالية لكثافة الاحتمال)، فكلما ابتعدت القيم عن الوسط، كان احتمال وقوعها أقل (وتشير إلى ذلك القيم المتدنية لكثافة الاحتمال).

إذا تم تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل له عدد ثابت من القيم بمنحنى طبيعي في فترة محددة، فإن:

- قمة المنحنى الذي على شكل جرس تقع عند الوسط حيث نجد كذلك خط التناظر للمنحنى.

- الوسط = المنوال = الوسيط.
- تتناقص الاحتمالات كلما ابتعدنا عن الوسط من الطرفَين – كلما ابتعدت قيمة عن الوسط الحساب كان احتمال وقوعها أقل.



المنوال = الوسيط = الوسط (و)

- التناقص في قيمة الوسط ينتج منه إزاحة للمنحنى إلى اليسار.
- التزايد في قيمة الوسط ينتج منه إزاحة للمنحنى إلى اليمين.
- التناقص في قيمة الانحراف المعياري والتباين (ع(س)، $ع^2$(س)) يعني أن القيم تصبح أقل انتشارًا عن الوسط وأكثر قربًا منه. ينتج من ذلك تزايد في ارتفاع المنحنى وتناقص في عرضه، ما يضمن ثبات قيمة المساحة تحت المنحنى.
- التزايد في قيمة الانحراف المعياري والتباين (ع(س)، $ع^2$(س)) يعني أن القيم تصبح أكثر انتشارًا عن الوسط وأكثر بعدًا عنه. ينتج من ذلك تناقص في ارتفاع المنحنى وتزايد في عرضه، ما يضمن ثبات قيمة المساحة تحت المنحنى.

مُساعَدة

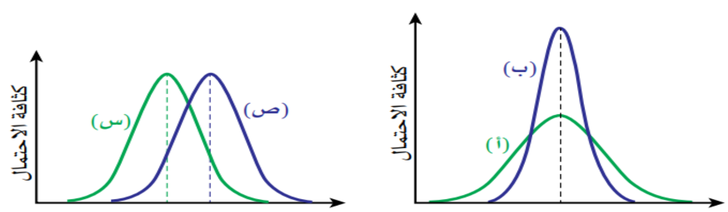
للإشارة إلى توزيع متغير عشوائي متصل (س)، يستخدم الترميز الآتي:
- الوسط = و
- التباين = $ع^2$(س)
- الانحراف المعياري = ع(س)

يمكن رسم أكثر من منحنى لتمثيل التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة ذات توزيعات طبيعية في تمثيل بياني واحد وذلك للتمكن من مقارنة بياناتها، مثل مقارنة أطوال الأولاد وأطوال البنات في حضانة للأطفال.

- إذا كان لمنحنيَين طبيعيَّين خط التناظر نفسه فإن للمتغيرَين الوسط نفسه.
- إذا كان لمنحنيَين الارتفاع والشكل نفسَيهما فإن للمتغيرَين الانحراف المعياري والتباين نفسَيهما.

مثــال ١

تبيّن التمثيلات الآتية منحنيات طبيعية تمثل التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات (أ)، (ب)، (س)، (ص).



لكل من المتغيرات وسط هو على الترتيب $و_أ$، $و_ب$، $و_س$، $و_ص$، وانحراف معياري هو على الترتيب ع(أ)، ع(ب)، ع(س)، ع(ص).

حدد مبررًا إجاباتك ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة.

أ $و_أ = و_ب$

ب $و_س < و_ص$

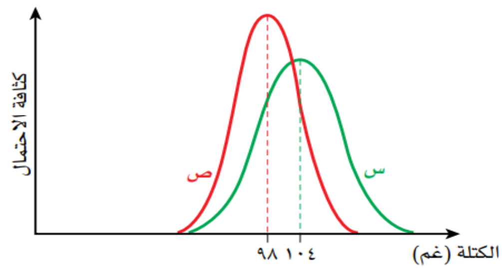
ج ع(أ) = ع(ب)

د $ع^2$(س) = $ع^2$(ص)

مثـال ٢

يتم بيع نوعَين من الشاي (س)، (ص) في علب كتلتها المكتوبة ١٠٠ غرام من الشاي.
كتلة الشاي في كل من العلبتَين لكلا النوعَين ذات توزيع طبيعي.
تم التحقق من عدد كبير من العلب لكلا النوعَين.
يبيّن الجدول الآتي والشكل المجاور النتائج:

	النوع (س)	النوع (ص)
وسط كتلة الشاي (غرام)	١٠٤	٩٨
الانحراف المعياري (غرام)	٣	٢



اكتب عبارة رياضية تقارن فيها:

أ) وسط كتلة كل من النوعَين.

ب) تباين كتلة كل من النوعَين.

تمارين ٦-١

١) حدد أيًا من الخيارات الآتية يصف متغيرًا عشوائيًا متصلًا.
بالنسبة إلى الخيارات التي لا تصف متغيرًا عشوائيًا متصلًا، حدد السبب:

أ) عدد مرات ظهور 'صورة' عند رمي قطعة نقدية منتظمة ١٠٠ مرة.

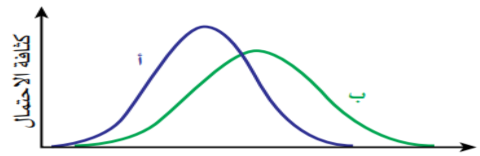
ب) عدد تأشيرات الدخول الصادرة خلال آب/أغسطس من العام الماضي للسياح القادمين إلى سلطنة عمان.

ج) الأحجام الممكنة لحبيبات الرمل.

د) عدد المرات التي يجب أن يرمى فيها حجر نرد منتظم حتى ظهور العدد ٦ لأول مرة.

الحل:

٢) يبيّن التمثيل البياني الآتي التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرَين العشوائيَّين المتصلَين (أ)، (ب).



حدد ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة:

أ) $و_أ > و_ب$

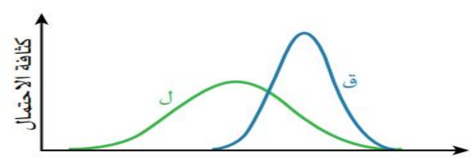
ب) ع(أ) > ع(ب)

ج) أكثر من نصف القيم في المنحنى (ب) أكبر من $و_أ$

د) أقل من نصف القيم في المنحنى (أ) أقل من $و_ب$

الحل:

٣) يبيّن التمثيل البياني الآتي منحنيَين طبيعيَّين يمثلان التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرَين العشوائيَّين المتصلَين (ل)، (ق).



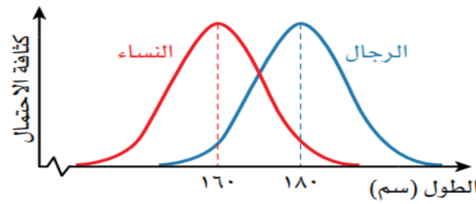
أ) استخدم رموزًا رياضية لتكتب عبارة تقارن فيها:
١) تباين (ل) مع تباين (ق).
٢) وسط المتغير (ل) مع وسط المتغير (ق).

ب) تبيّن أن حسابات (ل) ، (ق) تتضمن بعض الأخطاء.
الوسط الصحيح للمتغير (ل) أكبر مما يظهر في التمثيل البياني، والانحراف المعياري الصحيح للمتغير (ق) أقل مما يظهر في التمثيل البياني.
لتصحيح التمثيل البياني، اشرح التغييرات التي يجب أن تحصل للمنحنى الطبيعي للمتغير:
١) (ل) ٢) (ق)

ج) بعد تصحيح التمثيل البياني، ما هي الخاصية التي لا تتغير بالنسبة إلى المنحنيَين؟

الحل:

٤) ينتج من توزيعَين لأطوال ١٠٠٠ امرأة و ١٠٠٠ رجل منحنيان طبيعيان كما هو مبيّن في التمثيل البياني الآتي.
وسط أطوال النساء هو ١٦٠ سم، ووسط أطوال الرجال هو ١٨٠ سم.



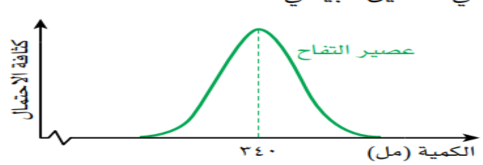
مُساعَدة
إشارة في بداية المحور الأفقي تشير إلى أن التدرج لم يبدأ من الصفر.

تم دمج بيانات أطوال هؤلاء النساء والرجال لتشكيل مجموعة بيانات جديدة.

على افتراض أن بيانات الأطوال الجديدة تنتج أيضًا منحنًى طبيعيًا، انسخ التمثيل البياني أعلاه وأضف إليه منحنى البيانات المدمجة لأطوال ٢٠٠٠ رجل وامرأة.

الحل:

٥) ينتج من التوزيع الاحتمالي لكمية العصير في ٥٠٠ عبوة من عصير التفاح منحنًى طبيعيٌّ وسطه ٣٤٠ مل وتباينه ٤ مل²، كما هو مبيّن في التمثيل البياني.



ينتج أيضًا من التوزيع الاحتمالي لكمية العصير في ١٠٠٠ عبوة من عصير الخوخ منحنًى طبيعيٌّ وسطه ٣٤٠ مل وانحرافه المعياري ٤ مل.

أ انسخ التمثيل البياني أعلاه وأضف إليه المنحنى الطبيعي لكمية عصير الخوخ في ١٠٠٠ عبوة عصير.

ب صف التشابهات والفروقات بين المنحنيَين.

الحل:

٦-٢ التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي

تعلمت في الدرس السابق كيف يُستخدم منحنى متناظر شكله يشبه الجرس لنمذجة التوزيعات الاحتمالية لبعض المتغيرات العشوائية المتصلة.

تتم نمذجة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل له توزيع طبيعي من خلال دالة رياضية تشكل طريقة لإيجاد احتمالات حصول نواتج أو مشاهدات مختلفة.

منحنى هذه الدالة معرف لكل قيم (س) والمساحة تحت كل المنحنى تساوي مجموع الاحتمالات وهو ١

يعرف المتغير العشوائي المتصل ذو التوزيع الطبيعي من خلال وسطه (و) وتباينه (ع^{٢}).

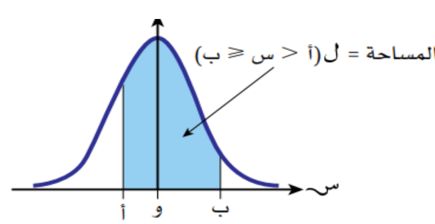
لوصف المتغير العشوائي المتصل ذي التوزيع الطبيعي (س) نكتب س ~ ط (و، ع^{٢}).

نتيجة ١

يعرّف س ~ ط (و، ع^{٢}) بالمتغير العشوائي المتصل ذي التوزيع الطبيعي (س).

نقرأ هذا على الشكل: للمتغير (س) توزيع طبيعي وسطه (و) وتباينه (ع^{٢})

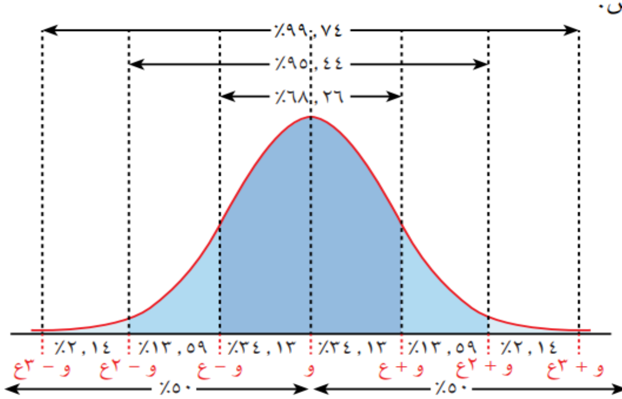
لكل متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي (س)، احتمال أن تكون للمتغير (س) قيمة بين أ، ب تساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين المحور السيني والمستقيمين س = أ، س = ب



مُساعَدة

المساحة تحت أي جزء من المنحنى لا تتغير بتضمين حدود الفترة أو عدمه. وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين قيم
ل(أ < س ≤ ب)،
ل(أ ≤ س < ب)،
ل(أ ≤ س ≤ ب)،
ل(أ < س < ب).

للتوزيعات الطبيعية الكثير من الخصائص المميزة. يبيّن التمثيل البياني والجدول الآتيان بعض هذه الخصائص.



المنحنى الطبيعي المعياري

تمثل التمثيلات البيانية الستة أ إلى ح التي ظهرت قبل نشاط استكشف ٢ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ذا توزيع طبيعي وسطه و = ٠ وانحرافه المعياري ع = ١ وتباينه ع^{٢} = ١

يطلق على هذا المتغير اسم **متغير طبيعي معياري** **standard normal variable** ويرمز إليه بالحرف (ز).

نتيجة ٢

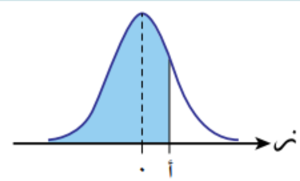
للمتغير الطبيعي المعياري (ز) وسط يساوي ٠ وتباين يساوي ١

يرمز إلى هذا المتغير بالرمز ز ~ ط (٠ ، ١).

يبيّن التمثيلان الآتيان ما يلي:

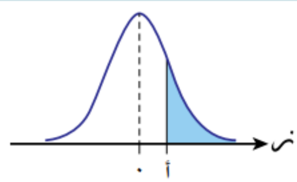
ل(ز < أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يسار ز = أ

ل(ز > أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يمين ز = أ



عندما أ > ٠

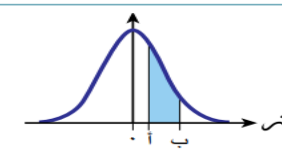
ل(ز < أ) = د(أ)



عندما أ > ٠

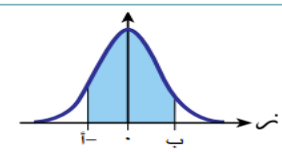
ل(ز > أ) = ١ − د(أ)

في التمثيلات الآتية بعض النتائج الأخرى المفيدة:



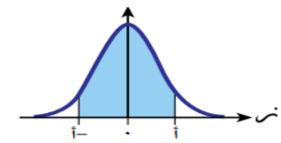
عندما ٠ < أ < ب

ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)



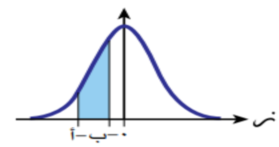
عندما −أ < ٠ < ب

ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١



عندما −أ < ٠ < أ

ل(−أ < ز < أ) = ٢د(أ) − ١



عندما −أ < −ب < ٠

ل(−أ < ز < −ب) = د(أ) − د(ب)

نتيجة ٣

إذا كان أ > ٠ ، ب > ٠ فإن:

- ل(ز < أ) = د(أ)
- ل(ز > أ) = ١ − د(أ)
- ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)
- ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١
- ل(−أ < ز < أ) = ٢ د(أ) − ١

يبيّن التمثيلان أن:

ل(ز ≤ ١,١) = ٠,٨٦٤٣

ل(ز ≤ −١,١) = ١ − ٠,٨٦٤٣ = ٠,١٣٥٧

نستخدم هذه المعلومة وتناظر المنحنى لإيجاد:

ل(ز > ١,١) = ١ − ٠,٨٦٤٣ = ٠,١٣٥٧

ل(ز > −١,١) = ١ − ٠,١٣٥٧ = ٠,٨٦٤٣

نتيجة ٤

إذا كان (ز) توزيعًا طبيعيًا وسطه (٠) وتباينه (١)، يعطي الجدول قيمة د (ز) لكل قيم ز حيث د (ز) = ل(ز)

للقيم السالبة للمتغير (ز)، استخدم د (−ز) = ١ − د (ز)

مُساعَدة

ل(ز > −أ) = ل(ز < أ).

ل(ز < −أ) = ل(ز > أ).

تمارين ٦-٢

نتيجة ٣

إذا كان أ > ٠ ، ب > ٠ فإن:

- ل(ز < أ) = د(أ)
- ل(ز > أ) = ١ - د(أ)
- ل(أ < ز < ب) = د(ب) - د(أ)
- ل(-أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) - ١
- ل(-أ < ز < أ) = ٢د(أ) - ١

١) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد:

أ د(٠,٣٥) ب د(١,٤٧)

د د(٠,٨٢) هـ ١ - د(٢,٨٦)

٢) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد ز، عندما:

أ د(ز) = ٠,٧٠٨٨ ب د(ز) = ٠,٩٠١٥

د د(ز) = ٠,٥١٩٩ هـ ١ - د(ز) = ٠,٠٧٦٤

٣) لديك ز ~ ط (٠ ، ١)؛ أوجد الاحتمالات الآتية:

أ ل(ز ⩽ ١,٥٣) ب ل(ز ⩽ ٠,٠٧) ج ل(ز ⩽ ٢,٤٦)

د ل(ز > ٢,٠٠) هـ ل(ز > ١,٧٥) و ل(ز > -٠,٠١)

٤) المتغير العشوائي (ز) ذو توزيع طبيعي وسطه (٠) وتباينه (١) أوجد الاحتمالات الآتية:

- **أ** ل(٠ < ز ≤ ٢,٥٠)
- **ب** ل(١,٠٠ < ز ≤ ١,٢٧)
- **ج** ل(١,٦٤ < ز ≤ ٢,٣٢)
- **د** ل(١,٤٢ < ز ≤ ١,٦٤)
- **هـ** ل(-١,٧٧ < ز ≤ ٠,٧٤)
- **و** ل(-١,٠٠ < ز ≤ -٠,٣١)
- **ز** ل(-١ < ز ≤ ١)
- **ح** ل(-١,٥٦ < ز ≤ ١,٥٦)

نتيجة ٣

إذا كان أ < ٠ ، ب < ٠ فإن:

- ل(ز < أ) = د(أ)
- ل(ز > أ) = ١ - د(أ)
- ل(أ < ز < ب) = د(ب) - د(أ)
- ل(-أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) - ١
- ل(-أ < ز < أ) = ٢د(أ) - ١

٥) لديك المتغير ز ~ ط (٠، ١)؛ أوجد قيمة $ز_١$:

أ) ل(ز $\leqslant$ $ز_١$) = ٠,٩٣٠٦

ب) ل(ز $\leqslant$ $ز_١$) = ٠,٦١٠٣

ج) ل(ز $\geqslant$ $ز_١$) = ٠,٨٣٤٠

د) ل(ز $>$ $ز_١$) = ٠,٠٢٩٤

هـ) ل(ز $<$ $ز_١$) = ٠,٧٥١٧

و) ل(ز $<$ $ز_١$) = ٠,٩٠١٥

الحل:

٦) أوجد قيمة $ز_١$ في كل من الآتي، حيث (ز) توزيع طبيعي وسطه و = ٠ وتباينه $ع^٢$(ز) = ١

أ) ل($ز_١$ $<$ ز $\leqslant$ ١,٧٣) = ٠,٤٥٨٢

ب) ل(١,٨٢ $<$ ز $\leqslant$ $ز_١$) = ٠,٠١٠٥

الحل:

٧) الأوقات اللازمة لرحلة جوية مباشرة من مسقط إلى مومباي (بالدقائق) ذات توزيع طبيعي وسطه (و) وانحرافه المعياري (ع).

أ أوجد احتمال أن تستغرق رحلة أقل من (و + ٠,٢٣ ع) دقيقة.

ب ما نسبة الرحلات التي تستغرق أكثر من (و + ٠,٣٢ ع) دقيقة؟

الحل:

٨) يتبع عدد اللترات المنتجة من الحليب في مزرعة ما توزيعًا طبيعيًا وسطه (و) وانحرافه المعياري (ع).

أ أوجد احتمال أن تنتج المزرعة أقل من (و + ١,٩٦ ع) لتر حليب في يوم معيّن.

ب ما نسبة الأيام التي تنتج فيها المزرعة أكثر من (و + ٠,٨٨ ع) لتر حليب؟

الحل:

٣-٦ تحويل التوزيع الطبيعي إلى الصيغة المعيارية لإيجاد الاحتمالات

يمكن استخدام المنحنى الطبيعي لتمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي. يتمركز هذا المنحنى حول الوسط (و)؛ والمساحة تحت المنحنى تساوي ١، وارتفاع قمة المنحنى يحدده الانحراف المعياري (ع).

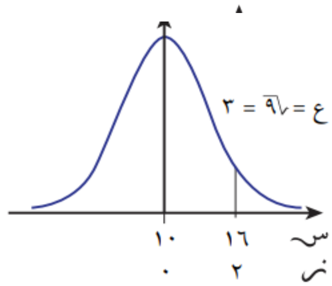
مُساعَدة

دالة التوزيع الطبيعي معرّفة لكل قيم (س) من $-\infty$ إلى $+\infty$، لذا فإن كل المنحنيات التي تنتج من الدالة لها فعليًا العرض نفسه.

تعلمت بالفعل طريقة لإيجاد الاحتمالات التي تتعلق بالمتغير الطبيعي المعياري ز ~ ط (٠، ١) باستخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي. ويمكن استخدام الجدول نفسه لإيجاد احتمالات قيم أي متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي، مهما كانت قيم و، ع^2

عند استخدام الجدول لإيجاد احتمالات س ~ ط (و، ع^2) مثل ل (س $\leqslant$ س_1) أو ل (س $<$ س_1) أو ل (س_1 $<$ س $\leqslant$ س_2) نحتاج فقط إلى معرفة عدد الانحرافات المعيارية فوق أو تحت الوسط لقيم س_1 و/أو س_2

وللقيام بهذا الأمر، توجد طريقة مباشرة، تسمى **التحويل إلى الصيغة المعيارية** **standardising** أو **coding**.



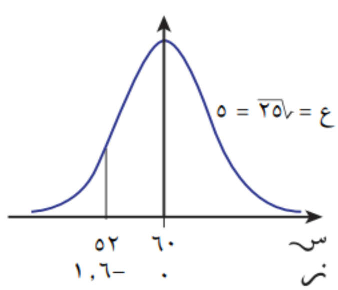
ليكن س = ١٦ حيث س ~ ط (١٠، ٩): $\frac{١٦ - ١٠}{\sqrt{٩}} = \frac{٦}{٣} = +٢$،

إذًا س = ١٦ هي فوق الوسط بمقدار ٢ انحراف معياري.

القيمة المعيارية للمتغير س = ١٦ هي ز = ٢

الاحتمالات المتعلقة بالقيمة س = ١٦ متطابقة مع

احتمالات ز = ٢



ليكن ص = ٥٢ حيث ص ~ ط (٦٠، ٢٥):

$\frac{٥٢ - ٦٠}{\sqrt{٢٥}} = \frac{-٨}{٥} = -١,٦$، إذًا ص = ٥٢ هي تحت الوسط

بمقدار ١,٦ انحراف معياري.

القيمة المعيارية للمتغير ص = ٥٢ هي ز = −١,٦

الاحتمالات المتعلقة بالقيمة ص = ٥٢ متطابقة مع

احتمالات ز = −١,٦

القيمة المحولة إلى الصيغة المعيارية تسمى **قيمة معيارية** **z-score**.

نتيجة ٥

إذا كان س ~ ط (و، ع^2) ، فإن للمتغير ز = $\frac{\text{س} - \text{و}}{\text{ع}}$ توزيعًا طبيعيًا معياريًا (و = ٠، ع^2 = ١)

تعطي القيمة المعيارية ز_1 = $\frac{\text{س}_1 - \text{و}}{\text{ع}}$ عدد الانحرافات المعيارية لقيمة س_1 عن الوسط.

ل (س = س_1) = ل $\left(\text{ز} = \frac{\text{س}_1 - \text{و}}{\text{ع}}\right)$

تمارين ٦-٣

١) احسب القيمة المعيارية لكل من الآتي:

أ س = ١٧ عندما س ~ ط (١٥، ٤)

ب س = ٣٨ عندما س ~ ط (٣٠، ١٦)

ج س = ٤٨ عندما س ~ ط (٤٢، ١٢)

د س = ٣٦,٨ عندما س ~ ط (٣٢,٤، ٢٠)

هـ س = ٧٢,٥ عندما س ~ ط (٨٣، ٤٩)

و س = ٢٢ عندما س ~ ط (٢٨، ١١)

ز س = ١٣٢ عندما س ~ ط (١٤٦، ١٠٩)

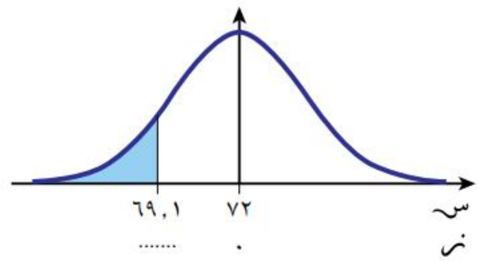
ح س = ٠ عندما س ~ ط (١٥، ٣٠)

الحل:

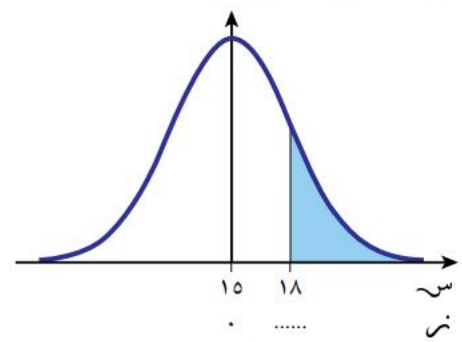
الحل:

٢) استخدم التمثيلات المعطاة لإيجاد الاحتمالات في كل من الآتي:

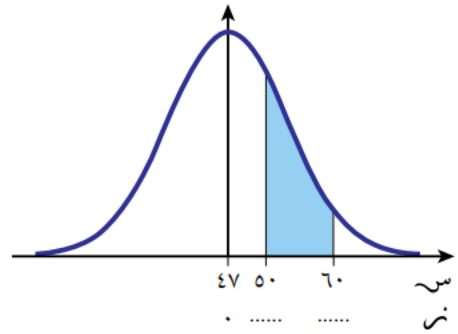
ج أوجد ل(س ≤ ٦٩,١) حيث س ~ ط(٧٢، ١١)



د أوجد ل(س > ١٨) حيث س ~ ط(١٥، ٦)

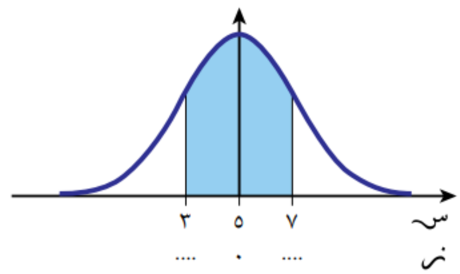


هـ أوجد ل(٥٠ < س < ٦٠) حيث س ~ ط(٤٧، ٩٠)



الحل:

و أوجد ل(٣ < س ≥ ٧) حيث س ~ ط(٥، ٥)



الحل:

٣) احسب الاحتمالات الآتية.

أ لديك س ~ ط (٦,٢، ٦,٢٥)؛ أوجد:

١) ل(س ⩽ ٩,٧) ٢) ل(س < ٩,٧)

ب لديك س ~ ط (٣، ٤٩)؛ أوجد:

١) ل(س ⩾ ٥) ٢) ل(س < ٥)

ج لديك س ~ ط (٣٧، ٤)؛ أوجد:

١) ل(س < ٣٣,٤) ٢) ل(س ⩾ ٣٣,٤)

د لديك س ~ ط (١١، ٢٥)؛ أوجد ل(١١ < س ⩽ ٢١)

هـ لديك س ~ ط (٣، ٧)؛ أوجد ل(٢ < س ⩽ ٧)

و لديك س ~ ط (١٠، ٤)؛ أوجد ل(٦ < س ⩽ ٩)

مُساعَدة

من المستحسن أن ترسم تمثيلًا بيانيًا توضيحيًا لمساعدتك في حل جزئيات السؤال ٣

الحل:

٤) (س) متغير ذو توزيع طبيعي وسطه ٤ وتباينه ٦؛ أوجد احتمال س $>$ ٠

٥) تتبع أوقات الانتظار في صيدلية لتسلّم الأدوية توزيعًا طبيعيًا وسطه ١٥ دقيقة وانحرافه المعياري ٢,٨ دقائق؛ أوجد احتمال أن يكون وقت الانتظار:

أ أقل من ٢٠ دقيقة.

ب أكثر من ١٧ دقيقة.

ج بين ١٠ دقائق و ١٨ دقيقة.

٤-٦ تحويل التوزيع الطبيعي إلى الصيغة المعيارية لإيجاد و، ع، س

في الدرس السابق، تم تحويل قيم متغير عشوائي متصل ذي توزيع طبيعي إلى الصيغة المعيارية، واستخدمت القيم المعيارية الناتجة لإيجاد الاحتمالات في الجدول.

كان بالإمكان القيام بهذا الأمر لأن المعطى كان و، ع، بالإضافة إلى قيمة س لإيجاد الاحتمال.

بطريقة مماثلة، بالإمكان استخدام الجدول لإيجاد قيم و، ع، س، عندما يكون المعطى قيمة احتمال ومعلومات أخرى كافية.

سيكون من الضروري في القسم الأكبر من الأمثلة في هذا الدرس استخدام الجزء الأساسي من الجدول بطريقة معكوسة لإيجاد قيم (ز).

إذا كان د $(ز_{١})$ = ك، يستخدم عند إيجاد قيمة $ز_{١}$ الرمز $ز_{١}$ = $د^{-١}$(ك).

تمارين ٦-٤

١) أوجد قيمة كل من الآتي مقربًا الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

- **أ** أ، س ~ ط (٣٠، ١٦)، ل(س ⩽ أ) = ٠,٨٩٤٤
- **ب** ب، س ~ ط (١٢، ٤)، ل(س ⩽ ب) = ٠,٩٥٩٩
- **ج** ج، س ~ ط (١٧، ٢٥)، ل(س > ج) = ٠,٠٩٥١
- **د** ي، س ~ ط (١٥، ٨)، ل(س > ي) = ٠,٣٥٢
- **هـ** هـ، س ~ ط (١، ٢)، ل(س > هـ) = ٠,١٣٣٥

٢) لديك س ~ ط(١٠، $ع^{٢}$)، ل (س > ١٤,٧) = ٠,٩٦٠٨؛ أوجد قيمة ع، مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

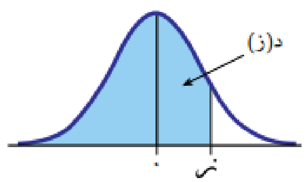
٣) لديك ص ~ ط(و، ١٣)، ل (ص ⩾ ١٥) = ٠,٧٤٥٤؛ أوجد قيمة و، مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان للمتغير (ز) توزيع طبيعي وسطه ٠ وتباينه ١ يعطي الجدول قيمة د (ز) لكل قيم ز، حيث

$$\text{د}(\text{ز}_1) = \text{ل}(\text{ز} \leqslant \text{ز}_1)$$

استخدم د (−ز) = ١ − د (ز) لقيم ز السالبة.



ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨