٧-٥ حلّ المعادلات Solving equations

ب^{٢} - ٤أجـ	طبيعة الجذور	الجذور
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان.	م، ل
= ٠	جذران حقيقيان متساويان.	م = ل
< ٠	جذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (عددان مركبان أحدهما مرافق للآخر).	م، م*

معادلات كثيرة الحدود من الدرجات العليا

نوع الدالة	طبيعة الجذور	الجذور
التكعيبية: د (س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د	٣ جذور حقيقية.	م، ل، ن
	جذر حقيقي واحد وجذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوج من الأعداد المركبة المترافقة).	م، ل، ل*

نوع الدالة	طبيعة الجذور	الجذور
من الدرجة الرابعة: د (س) = أس^{٤} + ب س^{٣} + جـ س^{٢} + د س + هـ	٤ جذور حقيقية.	م، ل، ن، ك
	جذران حقيقيان وجذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوج من الأعداد المركبة المترافقة).	م، ل، ن، ن*
	٤ جذور مركبة في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوجان من الأعداد المركبة المترافقة).	م، م*، ل، ل*

نتيجة ٤

عندما تحتوي دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد حقيقية على جذر مركب س + ص ت حيث ص ≠ ٠، يكون الجذر الآخر س − ص ت، حيث ص ≠ ٠

تكون الجذور أزواجًا من الأعداد المترافقة في صورة س ± ص ت.

نظرية العوامل

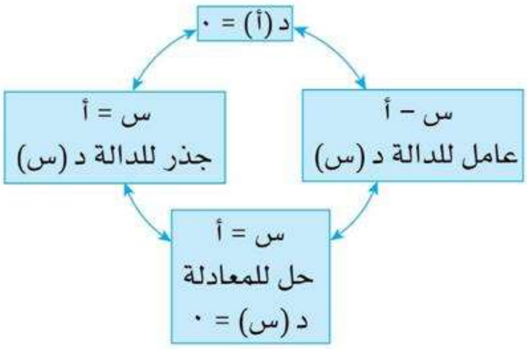
نتيجة ٥

لأي دالة معطاة د (س):

- إذا كان (س − أ) عاملًا للدالة د (س)، فإن د (أ) = ٠
- إذا كانت د (أ) = ٠، فإن (س − أ) عامل للدالة د (س).
- إذا كان (أس + ب) عاملًا للدالة د (س)، فإن د $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ = ٠
- إذا كانت د $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ = ٠، فإن (أس + ب) عامل للدالة د (س).

يبيّن المخطط أدناه ملخصًا لنظرية العوامل.

إذا كان أي من العناصر الأربعة صحيحًا، فإن العناصر الثلاثة الأخرى تكون صحيحة تلقائيًا.



الجذور التكعيبية للواحد

∴ الجذور التكعيبية للواحد هي: ع = ١، ع = $\frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$، ع = $\frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$

الكتاب ص ١٢٩

تمارين ٧-٥

١) إذا علمت أن $ع_1 = -ت$ جذر للمعادلة $ع^3 + ع^2 + ع + ك = ٠$، فأوجد:

أ) قيمة العدد الثابت ك.

ب) الجذرين الآخرين للمعادلة، وحدد ما إذا كانا حقيقيين أم مركبين.

$ت = \sqrt{-١}$

$ت^2 = -١$

$ت^3 = ت^2 \times ت$

$-١ \times ت = -ت$

بالتعويض عن $ع = -ت$

أ) $(-ت)^3 + (-ت)^2 + (-ت) + ك = ٠$

$-١ \times -ت - ١ - ت + ك = ٠$

$\cancel{ت} - ١ - \cancel{ت} + ك = ٠$

$-١ + ك = ٠ \Leftarrow \boxed{ك = ١}$

ب) $ع = -ت \Leftarrow (ع + ت)$ عامل للمعادلة

$(ع - ت)$

$\therefore ع^3 + ع^2 + ع + ١ = ٠$

$(ع + ت)(ع - ت)(ع + أ) = ٠$

$(ع^2 + ١)(ع + أ) = ٠$

$ع^3 + أع^2 + ع + أ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$

$ع + ١ = ٠$

$\boxed{ع = -١}$

جذور المعادلة هي

$ع_1 = -ت$ مركب

$ع_2 = ت$ مركب

$ع_3 = -١$ حقيقي

٣) أوجد جذور المعادلة $٢ع^2 + ع + ٣ = ٠$، واكتب إجابتك في الصورة القطبية.

$أ = ٢ \quad ب = ١ \quad ج = ٣$

$ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ٢ \times ٣}}{٢ \times ٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٢٣}}{٤} = \frac{-١}{٤} \pm \frac{\sqrt{٢٣}}{٤} ت$

س ، ص

المقياس $= \sqrt{\left(\frac{١}{٤}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{٢٣}}{٤}\right)^2} = \frac{\sqrt{٦}}{٢} \rightarrow ر$

السعة $= π - ظا^{-1}\left(\frac{\sqrt{٢٣}}{\cancel{٤}} \div \frac{١}{\cancel{٤}}\right) = π - ظا^{-1}(\sqrt{٢٣}) = ١,٧٨ \rightarrow θ$

$\therefore$ الجذور: ر $[جتا θ \pm ت جا θ]$

$\frac{\sqrt{٦}}{٢}(جتا ١,٧٨ \pm ت جا ١,٧٨)$

$\text{ع} = ٣$

٤) إذا علمت أن (ع − ٣) عامل للعبارة $\text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + ٢٥\text{ع} - ٧٥$، فأوجد جذور المعادلة $\boxed{\text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + ٢٥\text{ع} - ٧٥ = ٠}$

$$\text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + ٢٥\text{ع} - ٧٥ = (\text{ع} - ٣)(\text{أ}\,\text{ع}^٢ + \text{ب}\,\text{ع} + \text{جـ})$$

$\boxed{\text{أ} = ١}$

$-٣\text{جـ} = -٧٥$

$\text{جـ} = ٢٥$

$$= (\text{ع} - ٣)(\text{ع}^٢ + \text{ب}\,\text{ع} + ٢٥)$$

$$= \text{ع}^٣ + \text{ب}\,\text{ع}^٢ + ٢٥\text{ع} - ٣\text{ع}^٢ - ٣\text{ب}\,\text{ع} - ٧٥$$

$$= \text{ع}^٣ + (\text{ب} - ٣)\text{ع}^٢ + (٢٥ - ٣\text{ب})\text{ع} - ٧٥$$

$\text{ب} - ٣ = -٣$

$\text{ب} = \text{صفر}$

$$\therefore \text{ع}^٣ - ٣\text{ع}^٢ + ٢٥\text{ع} - ٧٥ = ٠$$

$$(\text{ع} - ٣)(\text{ع}^٢ + ٠\text{ع} + ٢٥) = ٠$$

$$(\text{ع} - ٣)(\text{ع}^٢ + ٢٥) = ٠$$

$\text{ع} - ٣ = ٠$ ، $\text{ع} = ٣$ | $\text{ع}^٢ + ٢٥ = ٠$ ، $\text{ع}^٢ = -٢٥ \Leftarrow \text{ع} = \pm ٥\text{ت}$

جذور المعادلة هي: ٣ ، ٥ت ، −٥ت

٥) إذا علمت أن $(\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})^٢ = ٥٥ + ٤٨\text{ت}$، فأوجد قيمة كل من س، ص، حيث س، ص عددان حقيقيان موجبان.

-١

$$\text{س}^٢ + ٢\text{س}\,\text{ص}\,\text{ت} + \text{ت}^٢\text{ص}^٢ = ٥٥ + ٤٨\text{ت}$$

$$(\text{س}^٢ - \text{ص}^٢) + ٢\text{س}\,\text{ص}\,\text{ت} = ٥٥ + ٤٨\text{ت}$$

$\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ٥٥$ ـــ (١) | $٢\text{س}\,\text{ص} = ٤٨$

$\text{ص} = \frac{٤٨}{٢\text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{٢٤}{\text{س}}$ ـــ (٢)

نعوض $\text{ص} = \frac{٢٤}{\text{س}}$ في (١) :

$$\text{س}^٢ - \left(\frac{٢٤}{\text{س}}\right)^٢ = ٥٥$$

$$\left(\text{س}^٢ - \frac{٥٧٦}{\text{س}^٢} = ٥٥\right) \times \text{س}^٢$$

$$\text{س}^٤ - ٥٧٦ = ٥٥\text{س}^٢$$

$$\text{س}^٤ - ٥٥\text{س}^٢ - ٥٧٦ = ٠$$

$\text{س}^٤ = (\text{س}^٢)^٢ = \text{م}^٢$

$\text{م} = \text{س}^٢$

$$\text{م}^٢ - ٥٥\text{م} - ٥٧٦ = ٠$$

(س² − ٦٤)(س² + ٩) = ٠

س² = ٦٤   س² = −٩ ← مرفوض لانه ليس عدد حقيقي

س = ± √٦٤

$\boxed{\text{س} = ٨}$

بالتعويض في ②   ص = ٢٤ / س

$\boxed{\text{ص} = ٢٤/٨ = ٣}$

٦) إذا علمت أن (٢ع + ١) عامل للعبارة ٢ع³ − ١١ع² + ١٤ع + ١٠، فأوجد جذور المعادلة ٢ع³ − ١١ع² + ١٤ع + ١٠ = ٠

٢ع³ − ١١ع² + ١٤ع + ١٠ = (٢ع + ١)(أع² + ب ع + جـ) ←

= (٢ع + ١)(ع² + ب ع + ١٠)

= ٢ع³ + ٢ب ع² + ٢٠ع + ع² + ب ع + ١٠

= ٢ع³ + (٢ب + ١)ع² + (ب + ٢٠)ع + ١٠

٢ب + ١ = −١١   ب + ٢٠ = ١٤

٢ع³ = ٢أع³

٢أ = ٢ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ١}$

$\boxed{\text{جـ} = ١٠}$

١٤ − ٢٠

٢٠ + ب = ١٤ ⇐ $\boxed{\text{ب} = −٦}$

٢ع³ − ١١ع² + ١٤ع + ١٠ = ٠

(٢ع + ١)(ع² − ٦ع + ١٠) = ٠

٢ع + ١ = ٠

ع = −١/٢

أ = ١   ب = −٦   جـ = ١٠

ع = (٦ ± √(٦² − ٤×١×١٠)) / (٢×١)

ع = (٦ ± √−٤) / ٢ = (٦ ± ٢ت) / ٢ = ٣ ± ت

جذور المعادلة هي: −١/٢ ، ٣ + ت ، ٣ − ت

٧) إذا علمت أن ع = ٣ت جذر للمعادلة ع^{٤} − ٢ع^{٣} + ١٤ع^{٢} − ١٨ع + ٤٥ = ٠، فحلّ المعادلة.

ع = ٣ت ← (ع − ٣ت) جذر

(ع + ٣ت) جذر آخر

حاصل الضرب: (ع − ٣ت)(ع + ٣ت) = ع^{٢} + ٩

ع^{٤} − ٢ع^{٣} + ١٤ع^{٢} − ١٨ع $\boxed{+٤٥}$ = (ع^{٢} + ٩)(أع^{٢} + بع + جـ)

$\boxed{أ = ١}$

٩جـ = ٤٥

جـ = $\frac{٤٥}{٩}$ = ٥

$\boxed{ب = −٢}$

= (ع^{٢} + ٩)(ع^{٢} + بع + ٥)

= ع^{٤} + بع^{٣} + ٥ع^{٢} + ٩ع^{٢} + ٩بع + ٤٥

(ع^{٢} + ٩)(ع^{٢} − ٢ع + ٥) = ٠

ع = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤×١×٥}}{١×٢}$ = $\frac{٢ \pm ٤ت}{٢}$ = ١ ± ٢ت

الجذور هي:

٣ت ، −٣ت ، ١+٢ت ، ١−٢ت

٨) أوجد الجذور التربيعية لكلّ من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $\sqrt{٢٤ - ١٠\text{ت}} = \text{س} + \text{ص}\,\text{ت}$

نفرض أن $(\text{س} + \text{ص}\,\text{ت})$ الجذر التربيعي

$$(\text{س} + \text{ص}\,\text{ت})^{٢} = ٢٤ - ١٠\text{ت} \quad ①$$

$$\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}\,\text{ص}^{٢} = ٢٤ - ١٠\text{ت}$$

$$\underbrace{(\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})}_{٢٤} + \underbrace{٢\,\text{س}\,\text{ص}}_{-١٠}\,\text{ت} = ٢٤ - ١٠\,\text{ت}$$

$$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٢٤ \quad ①$$

$$٢\,\text{س}\,\text{ص} = -١٠$$

$$\text{ص} = \frac{-١٠}{٢\,\text{س}} = \frac{-٥}{\text{س}} \quad ②$$

بالتعويض في ①

$$\text{س}^{٢} - \left(\frac{-٥}{\text{س}}\right)^{٢} = ٢٤$$

$$\text{س}^{٢} - \frac{٢٥}{\text{س}^{٢}} = ٢٤ \qquad \boxed{\times\ \text{س}^{٢}}$$

$$\text{س}^{٤} - ٢٥ = ٢٤\,\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{س}^{٤} - ٢٤\,\text{س}^{٢} - ٢٥ = ٠$$

$$(\text{س}^{٢} - ٢٥)(\text{س}^{٢} + ١) = ٠$$

$$\text{س}^{٢} - ٢٥ = ٠ \qquad\qquad \text{س}^{٢} + ١ = ٠$$

$$\text{س}^{٢} = ٢٥ \qquad\qquad \text{س}^{٢} = -١ \ \text{مرفوض}$$

$$\text{س} = \pm\sqrt{٢٥}$$

$$\text{س} = \pm ٥ \qquad \text{ص} = \frac{-٥}{\text{س}}$$

$$① \leftarrow \quad \text{س} = ٥ \Leftarrow \text{ص} = \frac{-٥}{٥} = -١$$

$$② \leftarrow \quad \text{س} = -٥ \Leftarrow \text{ص} = \frac{-٥}{-٥} = ١$$

الجذور

$$\boxed{\begin{matrix} ٥ - \text{ت} \\ -٥ + \text{ت} \end{matrix}}$$