التوزيع الطبيعي المعياري

نتيجة ٣

إذا كان المتغير (ز) يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا، فإن الجدول يعطي قيم د (ز١) لكل قيمة من قيم ز١، حيث ز١ > ٠، بحسب العلاقات الآتية:

- ل(ز ≤ ز١) = د (ز١)
- ل(ز > ز١) = ١ − ل(ز < ز١)
  = ١ − د (ز١)
- ل(ز ≤ −ز١) = ١ − ل(ز ≤ ز١)
  = ١ − د (ز١)
- ل(ز > −ز١) = ل(ز < ز١)
  = د (ز١)

٥) إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)؛ فأوجد قيمة ز١، في كل مما يأتي:

أكبر من ٠,٥ | +

أ) ل(ز ≤ ز١) = ٠,٩٣٠٦

د (ز١) = ٠,٩٣٠٦

ز١ = ١,٤٨

أكبر من ٠,٥ | الجدول | −

ز) ل(ز > ز١) = ٠,٧٥١٧

ز١ = −٠,٦٨

+

و) ل(ز > ز١) = ٠,٠٢٩٤ ⇐ د (ز١) = ١ − ٠,٠٢٩٤ = ٠,٩٧٠٦ ← الجدول

ز١ = ١,٨٩

أكبر من ٠,٥ ← من الجدول: < سالب، > موجب

أصغر من ٠,٥ ← ١ − س = ... ← من الجدول: < موجب، > سالب

٨) الوقت المستغرق (بالدقيقة) لرحلات الطيران من مسقط إلى ممباي يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا وسطه الحسابي (و)، وانحرافه المعياري (ع)، احسب:

و = ٠

ع = ١

أ احتمال أن تستغرق الرحلة زمنًا أقل من (و + ٢٣ ,٠ع) دقيقة.

ب النسبة المئوية للرحلات التي تستغرق زمنًا أكثر من (و + ٣٢ ,٠ع) دقيقة.

أ ل(ز < و + ٠,٢٣ع) = ل(ز < ٠,٢٣)

= د(٠,٢٣) = ٠,٥٩١٠

ب ل(ز > و + ٠,٣٢ع) = ل(ز > ٠,٣٢)

= ١ − ٠,٦٢٥٥ = ٠,٣٧٤٥

النسبة = ٠,٣٧٤٥ × ١٠٠ = ٣٧,٤٥ ٪

٩) الإنتاج اليومي من الحليب، باللتر، المدوّن في السجل اليومي في مصنع ما يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا وسطه الحسابي (و)، وانحرافه المعياري (ع). احسب:

صفر

١

أ احتمال أن يكون الإنتاج في يوم ما أقل من (و + ٩٦ ,١ع). صفر

١

ب النسبة المئوية للأيام التي يكون الإنتاج فيها أكثر من (و + ٨٨ ,٠ع).

أ ل(ز < ١,٩٦) = د(١,٩٦) = ٠,٩٧٥٠

ب ل(ز > ٠,٨٨) = ١ − د(٠,٨٨)

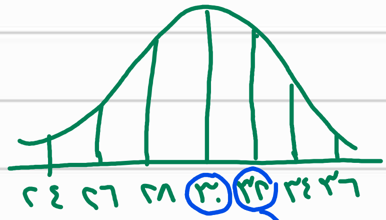
= ١ − ٠,٨١٠٦ = ٠,١٨٩٤

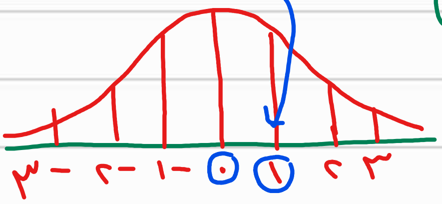
النسبة المئوية = ٠,١٨٩٤ × ١٠٠ = ١٨,٩٤ ٪

٨-٣ معيارية التوزيع الطبيعي Standardising a normal distribution

٨-٣أ معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات

Standardising a normal distribution to find probabilities





س ~ ط (٣٠، ٤)

$ع^٢ = ٤$

ز ~ ط (٠، ١)

ل(س < ٣٢)

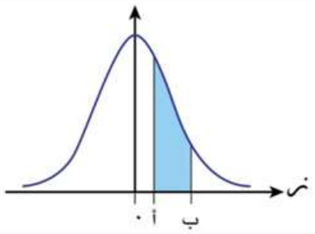
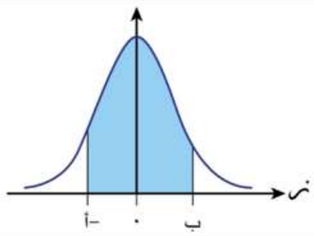
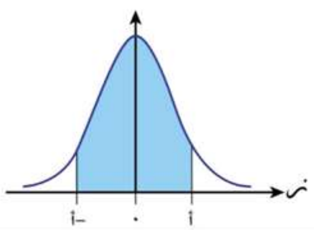
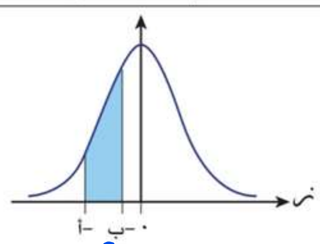
ل(ز < ١)

$\frac{٣٢ - ٣٠}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

نتيجة ٤

إذا كان س ~ ط (و، $ع^٢$) ، فإن ز $= \frac{س - و}{ع}$ يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا.

الدرجة (القيمة) المعيارية ($ز_١$) $= \frac{س_١ - و}{ع}$ تدلنا على عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها $س_١$ عن الوسط الحسابي.

	عندما ٠ < أ < ب ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)
	عندما −أ < ٠ < ب ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١
	عندما −أ < ٠ < أ ل(−أ < ز < أ) = ٢د(أ) − ١
	عندما −أ < −ب < ٠ ل(−أ < ز < −ب) = د(أ) − د(ب)

نتيجة ٥

إذا علمنا أن س ~ ط (و، ع²):

- ل(أ > ز > ب) = د(ب) – د(أ)، حيث ٠ > أ > ب
- ل(-أ > ز > ب) = د(ب) + د(أ) – ١، حيث -أ > ٠ > ب
- ل(-أ > ز > أ) = ٢د(أ) – ١، حيث -أ > ٠ > أ
- ل(-أ > ز > -ب) = د(أ) – د(ب)، حيث -أ > -ب > ٠

تمارين ٨-٣أ

١) احسب الدرجة (القيمة) المعيارية، واكتب الناتج مقرّبًا إلى أقرب ٣ أرقام معنوية في كل مما يأتي:

ز = $\frac{\text{س} - \text{و}}{\text{ع}}$

أ س = ١٧ إذا علمت أن س ~ ط(١٥، ٤)

و ، ع ، $\sqrt{4}$

ز = $\frac{١٧ - ١٥}{\sqrt{٤}}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١٫٠٠

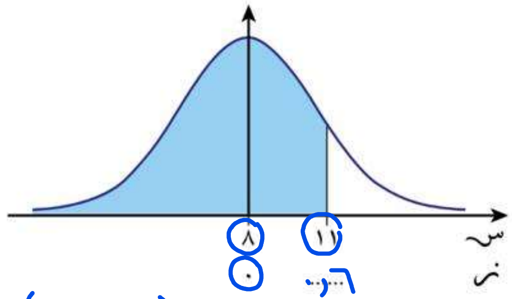
ب س = ٣٨ إذا علمت أن س ~ ط(٣٠، ١٦)

ز = $\frac{٣٨ - ٣٠}{\sqrt{١٦}}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢٫٠٠

٢) استخدم الشكل المعطى لتجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ إذا علمت أن س ~ ط(٨، ٢٥)، فأوجد ل(س ≤ ١١)

القيمة المعيارية = $\frac{١١ - ٨}{\sqrt{٢٥}}$ = ٠٫٦



ل(س ≤ ١١) = ل(ز ≤ ٠٫٦)

= د(٠٫٦) = ٠٫٧٢٥٧

٣) احسب الاحتمالات المطلوبة في كل مما يأتي:

أ إذا علمت أن س ~ ط(٦,٢، ٦,٢٥)، فأوجد:

١) ل(س ≤ ٩,٧)   ٢) ل(س > ٩,٧)

ز = ١,٤

١) ز = (٩,٧ − ٦,٢) / √٦,٢٥ = ١,٤

ل(س ≤ ٩,٧) = ل(ز ≤ ١,٤)

= د(١,٤) = ٠,٩١٩٢

٢) ل(س > ٩,٧) = ل(ز > ١,٤)

= ١ − د(١,٤)

= ١ − ٠,٩١٩٢

= ٠,٠٨٠٨

ز إذا علمت أن س ~ ط(٣، ٧)، فأوجد ل(٢ < س ≤ ٥)

ز١ = (٢ − ٣) / √٧ = −٠,٣٨ ، ز٢ = (٥ − ٣) / √٧ = ٠,٧٦

ل(٢ < س ≤ ٥) = ل(−٠,٣٨ < ز ≤ ٠,٧٦)

= د(٠,٧٦) + د(٠,٣٨) − ١

= (٠,٧٧٦٤ + ٠,٦٤٨٠) − ١ = ٠,٤٢٤٤

٤) إذا علمت أن المتغير العشوائي المتصل س ~ ط(و، و²)، فأوجد احتمال اختيار قيمة س عشوائيًا:

أ أصغر من ٢و   ب أكبر من ١٠/٩ و

أ) ل(س < ٢و) = ل(ز < (٢و − و) / √و²)   و/و = ١

= ل(ز < ١) = د(١)

= ٠,٨٤١٣

ب) ز = (١٠/٩ و − و) / و = ٠,١١ و / و = ٠,١١

ل(ز > ٠,١١) = ١ − د(٠,١١)

= ١ − ٠,٥٤٣٨

= ٠,٤٥٦٢

(ع) و

٥) إذا علمت أن المتغير العشوائي المتصل ص ~ ط (٣ع، ٤ع^{٢})، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

س

أ ل(ص ≥ ٧ع)

ب ل(ص > $\frac{٩}{٢}$ع)

أ) ز = $\frac{٧ع - ٣ع}{\sqrt{٤ع^{٢}}}$ = $\frac{٤ع}{٢ع}$ = ٢

ل(ص ≥ ٧ع) = ل(ز ≥ ٢)

= د(٢)

= ٠,٩٧٧٢

ب) ز = $\frac{\frac{٩}{٢}ع - ٣ع}{٢ع}$ = $\frac{\frac{٣}{٢}ع}{٢ع}$ = ٠,٧٥

ل(ص > $\frac{٩}{٢}$ع) = ل(ز > ٠,٧٥)

= ١ − د(٠,٧٥)

= ١ − ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٢٦٦

٦) الراتب السنوي بالريال العُماني للموظفين في دار نشر يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٨س، وانحرافه المعياري ٢س. احسب:

ل(س < ١١س)

أ احتمال أن يكون الراتب السنوي لموظف يعمل في دار النشر أقل من ١١س ريالًا عُمانيًا.

ب النسبة المئوية للموظفين الذين يعملون في دار النشر، راتب كل منهم السنوي يقع بين ٦س و١٠س ريالًا عُمانيًا.

أ) ز = $\frac{١١س - ٨س}{٢س}$ = $\frac{٣س}{٢س}$ = ١,٥

ل(س < ١١س) = ل(ز < ١,٥) = د(١,٥) = ٠,٩٣٣٢

ب) ز$_{١}$ = $\frac{٦س - ٨س}{٢س}$ = $\frac{-٢س}{٢س}$ = −١

ز$_{٢}$ = $\frac{١٠س - ٨س}{٢س}$ = $\frac{٢س}{٢س}$ = ١

ل(−١ < ز < ١) = ٢د(١) − ١

= (٢ × ٠,٨٤١٣) − ١

= ٠,٦٨٢٦

النسبة المئوية = ٠,٦٨٢٦ × ١٠٠ = ٦٨,٢٦٪

٨-٣ب معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و، ع، س

Standardising a normal distribution to find μ, σ, x

تمارين ٨-٣ب

١) أوجد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ حيث س ~ ط (٣٠، ١٦)، ل(س ≤ أ) = ٠,٨٩٤٤

ل(س ≤ أ) = ٠,٨٩٤٤

ل(ز ≤ (أ − ٣٠)/√١٦) = ٠,٨٩٤٤ — أكبر من ٠,٥

(أ − ٣٠)/٤ = ١,٢٥ ⟸ أ = (٤ × ١,٢٥) + ٣٠ ⟸ أ = ٣٥

ب حيث س ~ ط (١٢، ٤)، ل(س ≤ ب) = ٠,٩٥٩٩

ل(س ≤ ب) = ٠,٩٥٩٩

ل(س ≤ (ب − ١٢)/√٤) = ٠,٩٥٩٩ — أكبر من ٠,٥ ← الجدول

(ب − ١٢)/٢ = ١,٧٥

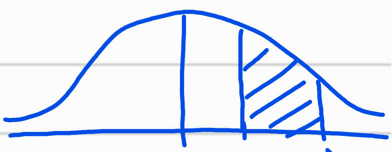
ب − ١٢ = ٢ × ١,٧٥

ب = ٣,٥ + ١٢

ب = ١٥,٥

٢) أوجد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ ح حيث س ~ ط (٧، ٢)، ل(٨ < س ≤ ح) = ٠,٢١٦٠



٠,٧١ (ح − ٧)/√٢

ل((٨ − ٧)/√٢ < ز < (ح − ٧)/√٢) = ٠,٢١٦٠

ل(٠,٧١ < ز < (ح − ٧)/√٢) = ٠,٢١٦٠

د((ح − ٧)/√٢) − د(٠,٧١) = ٠,٢١٦٠

د((ح − ٧)/√٢) − ٠,٧٦١١ = ٠,٢١٦٠

الجدول

د((ح − ٧)/√٢) = ٠,٢١٦٠ + ٠,٧٦١١ = ٠,٩٧٧١

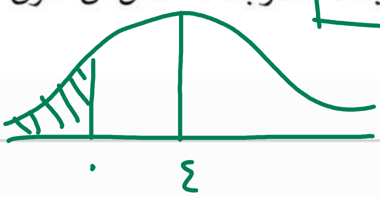
(ح − ٧)/√٢ = (١,٩٩ + ٢)/٢ = ١,٩٩٥

ح = (١,٩٩٥ × √٢) + ٧

ح = ٩,٨٢

٣) إذا علمت أن المتغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٤، وتباينه ٦ فأوجد احتمال أن تكون قيمة س سالبة.

√٦



ل(س < ٠) = ل(ز < (٠ − ٤)/√٦) = ل(ز < −١,٦٣)

ل(ز > ١,٦٣) = ١ − د(١,٦٣)

= ١ − ٠,٩٤٨٤ = ٠,٠٥١٦

٤) إذا علمت أن ت ~ ط(١٠، ع²)، ل(ت > ١٤,٧) = ٠,٠٤، فأوجد قيمة ع مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

و

ل(ت > ١٤,٧) = ٠,٠٤

ل(ز > (١٤,٧ − ١٠)/ع) = ٠,٠٤

ل(ز > ٤,٧/ع) = ٠,٠٤

١ − د(٤,٧/ع) = ٠,٠٤

د(٤,٧/ع) = ١ − ٠,٠٤

د(٤,٧/ع) = ٠,٩٦٠٠

٤,٧/ع = (١,٧٦ + ١,٧٥)/٢ = ١,٧٥٥

ع = ٤,٧/١,٧٥٥ = ٢,٦٨

٥) إذا علمت أن ص ~ ط(و، ١٣)، ل(ص ≤ ١٥) = ٠,٧٥، فأوجد قيمة و مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ل(ص ≤ ١٥) = ٠,٧٥

ل(ز ≤ (١٥ − و)/√١٣) = ٠,٧٥٠٠

(١٥ − و)/√١٣ = (٠,٦٧ + ٠,٦٨)/٢

١٥ − و = √١٣ × ٠,٦٧٥

و = ١٥ − ٢,٤٣

و = ١٢,٥٧

٦) إذا علمت أن ص ~ ط(و، ع²)، حيث و = ٤ع، ل(ص ⩽ ٨٣) = ٠,٩٥، فأوجد قيمة كل من و، ع مقربًا كل منهما إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

ص ~ ط(٤ع، ع²)

ل(ص ⩽ ٨٣) = ٠,٩٥

ل(ز ⩽ (٨٣ − ٤ع) ÷ ع) = ٠,٩٥٠٠

(٨٣ − ٤ع) ÷ ع = (١,٦٥ + ١,٦٤) ÷ ٢

(٨٣ − ٤ع) ÷ ع = ١,٦٤٥

٨٣ − ٤ع = ١,٦٤٥ ع

٥,٦٤٥ ع = ٨٣

ع = ٨٣ ÷ ٥,٦٤٥ = ١٤,٨

و = ٤ع = ٤ × ١٤,٨

و = ٥٨,٨